

Behauptungen mit Beweisen

Immer wieder müsst ihr in der Mathematik Behauptungen beweisen. Hier habe ich euch nun einige Behauptungen aufgestellt. Die ihr mit den Erkenntnissen aus dem bisherigen Geometrie-Kapitel eigentlich beweisen könnt. Probiert es einfach mal und wenn ihr nicht weiter wisst, könnt ihr auch in die Lösung schauen... ☺

Sätze:

1. Wenn Dreiecke in den Verhältnissen der Längen entsprechender Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

Beweis:

Das Verhältnis der Längen entsprechender Seiten sei k . Wir bilden das Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ab. Das Bilddreieck bezeichnen wir mit $A'B'C'$.

Nach der Konstruktion ist $a' = k \cdot a = a''$, $b' = k \cdot b = b''$ und $c' = k \cdot c = c''$.

Die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ stimmen in den Längen entsprechender Seiten überein, sind also nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Es gibt also eine Kongruenzabbildung, die das Dreieck $A'B'C'$ auf das Dreieck $A''B''C''$ abbildet.

2. Wenn Dreiecke im Betrag zweier Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

Beweis:

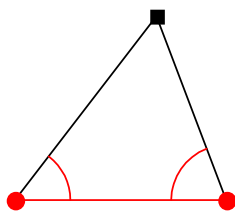
Behauptung:

$A'''B'''C'''$ ist kongruent zu $A''B''C''$

1. $A'''B''' = A''B'' = k \cdot AB$

2. $a''' = a''$, $\beta''' = \beta''$, $\gamma''' = \gamma''$

Kongruenzsatz WSW:



→ $A'''B'''C'''$ ist kongruent zu $A''B''C''$ ist bewiesen.

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

Beweis:

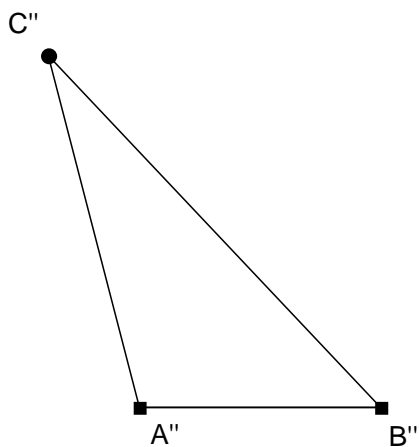
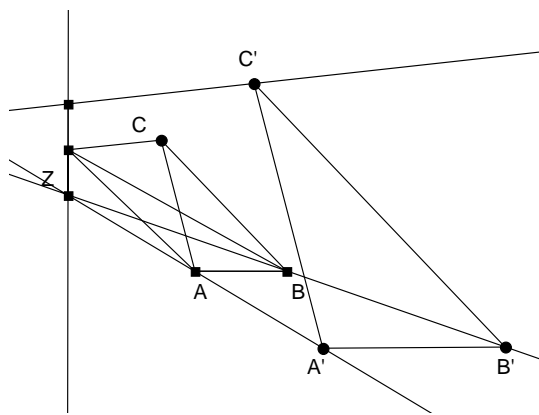
1. Gegeben sind das Dreieck ABC mit $a=4\text{ cm}$, $b=3\text{ cm}$, $c=2\text{ cm}$ und das Dreieck $A''B''C''$ mit $a''=8\text{ cm}$, $b''=6\text{ cm}$ und $c''=4\text{ cm}$.

a) Zeichne die beiden Dreiecke.

b) Strecke das Dreieck ABC zentratisch mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor $k=2$.

c) Beweise: Das Dreieck $A'B'C'$ und das Dreieck $A''B''C''$ sind kongruent.

Lösung:



Behauptung:

1. Wenn Dreiecke in den Verhältnissen der Längen entsprechender Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

Beweis:

Das Verhältnis der Längen entsprechender Seiten sei k . Wir bilden das Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ab. Das Bilddreieck bezeichnen wir mit $A'B'C'$.

Nach der Konstruktion ist $a'=k \cdot a=a''$, $b'=k \cdot b=b''$ und $c'=k \cdot c=c''$.

Die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ stimmen in den Längen entsprechender Seiten überein, sind also nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Es gibt also eine Kongruenzabbildung, die das Dreieck $A'B'C'$ auf das Dreieck $A''B''C''$ abbildet.

2. Zeichne 2 (verschieden große) Dreiecke ABC und $A''B''C''$ mit 2 gleichen Winkeln

$$\alpha = \alpha'' = 40^\circ, \beta = \beta'' = 70^\circ$$

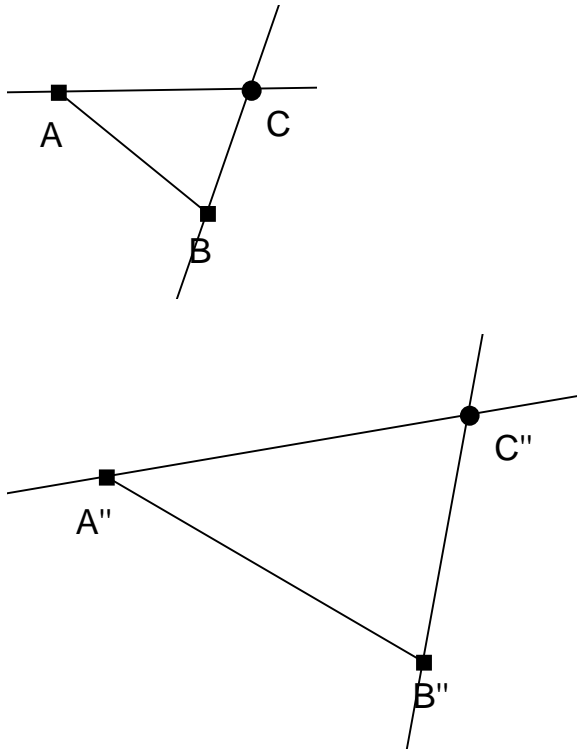
Was kannst du über γ und γ'' aussagen?

b) Bilde durch eine Kongruenzabbildung den Winkel α auf den Winkel α'' ab. Welche Lage hat das dabei entstehende Bilddreieck $A'B'C'$ zum Dreieck $A''B''C''$?

c) Beweise: $B'C' \parallel B''C''$ und $a'/a = b'/b = c'/c$.
(Beachte: $b' = b, c' = c, a' = a$)

d) Strecke jetzt das Dreieck ABC mit dem Zentrum $Z = A$ und $k = A'B''/AB$.
Beweise: Das durch Streckung gewonnene Bilddreieck und das Dreieck $A''B''C''$ sind kongruent.

Lösung:



$$y = 70^\circ$$

$$y = 70^\circ$$

Beweis:

2. Wenn Dreiecke im Betrag zweier Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

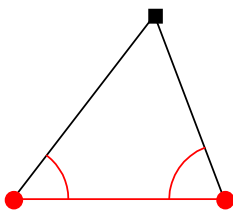
Beweis:**Behauptung:**

$A''B''C''$ ist kongruent zu $A'B'C'$

1. $A''B'' = A'B' = k \cdot AB$

2. $\alpha'' = \alpha'$, $\beta'' = \beta'$, $\gamma'' = \gamma'$

Kongruenzsatz WSW:



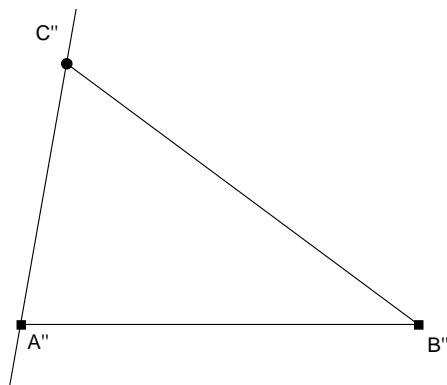
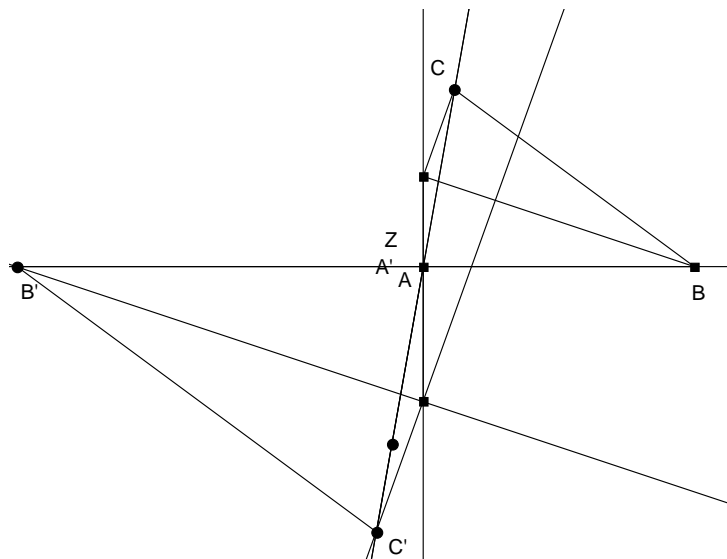
→ $A''B''C''$ ist kongruent zu $A'B'C'$ ist bewiesen.

3. Konstruiere das Dreieck ABC aus $b=4\text{ cm}$, $c=6\text{ cm}$, $\alpha=80^\circ$ und das Dreieck $A''B''C''$ aus $b''=6\text{ cm}$, $c''=9\text{ cm}$, $\alpha''=80^\circ$.

b) Bilde das Dreieck ABC durch zentrische Streckung ab mit dem Zentrum $Z=A$ und dem Streckfaktor $k=-3/2$. Bezeichne das Bilddreieck mit $A'B'C'$.

c) Beweise: Das Dreieck $A'B'C'$ ist kongruent zu dem Dreieck $A''B''C''$.

Lösung:



Beweis:

3. Wenn Dreiecke in den Verhältnissen der Längen zweier entsprechender Seiten und im Betrag des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

Beweis:

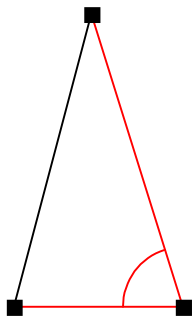
Behauptung:

$A'B'C'$ ist kongruent zu $A''B''C''$

1. $b''=b*k; c''=c*k$ \longrightarrow gleiche Seitenlängen

2. $a'=a'', \beta''=\beta'', \gamma''=\gamma''$

Kongruenzsatz SWS:



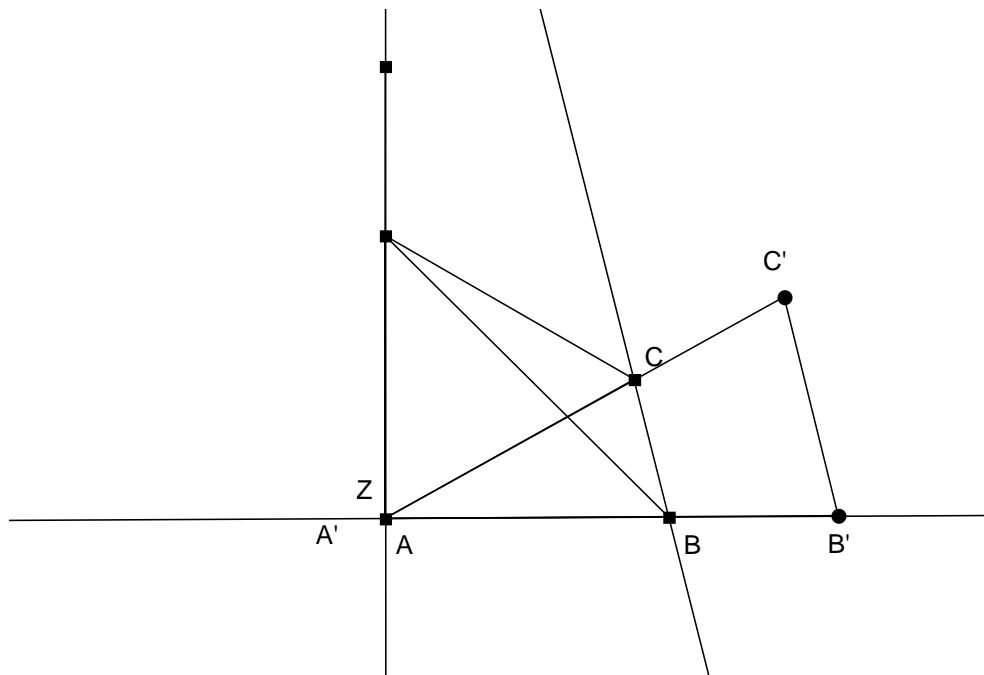
\longrightarrow $A'B'C'$ ist kongruent zu $A''B''C''$ ist bewiesen.

4. Konstruiere das Dreieck ABC aus $c=5\text{ cm}$, $a=2,5\text{ cm}$, $\gamma=75^\circ$ und das Dreieck $A''B''C''$ aus $c''=8\text{ cm}$, $a''=4\text{ cm}$, $\gamma''=75^\circ$

b) Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $Z=C$ und dem Streckfaktor $k=8/5$ ab. Bezeichne das Bilddreieck mit $A'B'C'$.

c) Beweise: Das Dreieck $A'B'C'$ ist kongruent zu dem Dreieck $A''B''C''$.

Lösung:



Beweis:

4. Wenn Dreiecke in den Verhältnissen der Längen zweier entsprechender Seiten und im Betrag des Winkels, übereinstimmen, der der längeren Seiten gegenüberliegt, dann sind sie ähnlich.

Beweis:

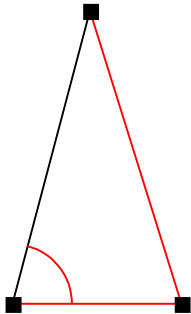
Behauptung:

$A'B'C'$ ist kongruent zu $A''B''C''$

1. $b'=b \cdot k$; $c''=c \cdot k$ \longrightarrow gleiche Seitenlängen

2. $\alpha'=\alpha''$, $\beta''=\beta''$, $\gamma''=\gamma''$

Kongruenzsatz SSWg:



→ $A'B'C'$ ist kongruent zu $A''B''C''$ ist bewiesen.