

Bruchgleichungen in einer Variablen

8.6 Bruchgleichungen

Gleichungen, in denen Bruchterme vorkommen, bezeichnet man als **Bruchterme**.

Die gemeinsame Definitionsmenge der Bruchterme bezeichnet man als **Definitionsmenge der Bruchgleichung**.

Beispiel:

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x} = \frac{2}{8-x} \quad G = \mathbb{R}$$

Der erste Nenner wird Null für -4 der zweite für 0 und der dritte für 8 . Diese drei Zahlen dürfen also nicht in die Bruchgleichung eingesetzt werden, denn die Division durch 0 ist in der Mathematik verboten.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 8\}$ Bedeutet, dass alle Zahlen für x eingesetzt werden dürfen außer $-4, 0, 8$.

8.7 Lösungsverfahren für Bruchgleichungen

Lösungsverfahren für Bruchgleichungen

1. *Schritt:* Bestimmen der Definitionsmenge D .

2. *Schritt:* Bestimmen des Hauptnenners.

3. *Schritt:* Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen

4. *Schritt:* Lösen der entstandenen „Nicht-Bruchgleichung“.

5. *Schritt:* Nachprüfen, ob die Lösungen der „Nicht-Bruchgleichung“ zu D gehören und die Lösungsmenge angeben.

6. *Schritt:* Probe an der Bruchgleichung.

Beispiel:

Gegeben ist: $\frac{x-7}{x+4} - \frac{x+8}{x-2} = \frac{x}{x+2} \quad G = \mathbb{R}$

1. Schritt: Bestimmen der Definitionsmenge D .

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2; -2\}$$

2. Schritt: Bestimmen des Hauptnenners.

$$x+4 = (x+4)$$

$$x-2 = (x-2) \quad \text{Hauptnenner: } (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

$$x+2 = x+2$$

3. Schritt: Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner und ggf. Kürzen

$$\frac{x-7}{x+4} - \frac{x+8}{x-2} = \frac{x}{x+2} \quad | \cdot \text{Erweitern } (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

$$\frac{(x-7)(x-2) \cdot (x+2) - (x+8)(x+4)(x+2)}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x(x+4)(x+2)}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

$$\frac{(x^2 - 9x + 14)(x+2) - (x^2 + 12x + 12)(x+2)}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x(x+4)(x+2)}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

$$\frac{(x^3 - 7x^2 - 4x + 28) - (x^3 + 14x^2 + 36x + 24)}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x^3 + 10x + 4x^2}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

4. Schritt: Lösen der entstandenen „Nicht-Bruchgleichung“.

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 4x + 28 - x^3 + 14x^2 + 36x + 24}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x^3 + 10x + 4x^2}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

Die Bruchgleichung führt zu einer linearen Gleichung.

$$\frac{7x^2 + 32x + 52}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x^3 + 10x + 4x^2}{(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

$$7x^2 + 32x + 52 = x^3 + 10x + 4x^2$$

$$7x^2 + 32x + 52 = x^3 + 10x + 4x^2 \quad | -4x^2$$

$$3x^2 + 32x + 52 = x^3 + 10x \quad | -10x$$

$$3x^2 + 22x + 52 = x^3$$

5. Schritt: Nachprüfen, ob die Lösungen der „Nicht-Bruchgleichung“ zu D gehören und die Lösungsmenge angeben.

$$L = \{4, 95\}$$

6. Schritt: Probe an der Bruchgleichung.

Probe stimmt.