

Proportionale Zuordnung

3. Proportionale Zuordnung, umgekehrt proportionale Zuordnung, Dreisatz

3.1 Proportionale Zuordnung

Bei einer **proportionalen Zuordnung** wird dem Doppelte (3fache, ...) der einen Größe das Doppelte (3fache, ...) der anderen Größe zugeordnet.

Die Zahlenpaare sind quotientengleich.

Die Zuordnung $x \rightarrow k \cdot x$.

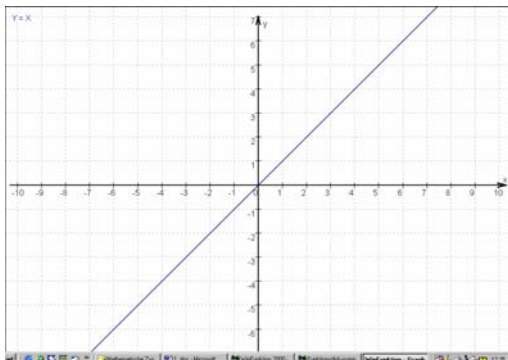
Der Quotient der Zahlenpaare ist der **Proportionalitätsfaktor k**.

Beispiel:

Ein Buchenholzstück von 15 €^3 hat eine Masse von 10,5 g.

Der Quotient (Masse : Volumen) ist $0,7 \text{ g/cm}^3$.

Masse = $0,7 \text{ g/cm}^3 \cdot \text{Volumen}$



Die zu einer proportionalen Zuordnung gehörenden Punkte liegen auf einer **Ursprungsgeraden**.

3.2 Dreisatz bei einer proportionaler Zuordnung

Beispiel:

Ein Zementsockel von 105 dm^3 wiegt $325,5 \text{ kg}$.
Wie viel wiegt ein Sockel von 320 dm^3 ?

Was wollen wir wissen? Wie viel wiegen 320 €?

1. Was wissen wir 105 dm^3 wiegen $325,5 \text{ kg}$
2. Schluss auf die Einheit 1 dm^3 wiegt $\frac{325,5}{105} \text{ kg} = 3,1 \text{ kg}$
3. Schluss auf das Vielfache 320 dm^3 wiegen dann $3,1 \cdot 320 \text{ kg}$

Antwort: Ein Zementsockel von 320 dm^3 wiegt $3,1 \cdot 320 \text{ kg} = 992 \text{ kg}$.

3.3 Umgekehrte proportionale Zuordnung

Bei einer **umgekehrt proportionalen Zuordnung** wird dem Doppelte (3fache, ...) der einen Größe

Die Hälfte der (3.Teil, ...) der anderen Größe zugeordnet.

Die Zahlenpaare sind produktgleich.

Das Produkt k .

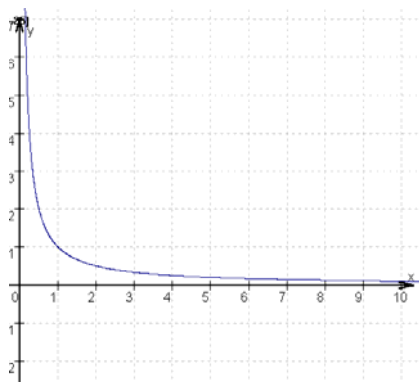
Die Zuordnung ist $x \rightarrow \frac{k}{x}$.

Beispiel:

Ein Rechteck mit den Seiten a und b hat einen Flächeninhalt von 12 cm^2 . Wenn die Seite a die Länge 3 cm hat, so hat b die Länge von 4 cm .

$$a \cdot b = 12 \text{ cm}^2 \text{ oder } b = \frac{12 \text{ cm}}{a}$$

Die zu einer umgekehrt proportionalen Zuordnung gehörenden Punkte liegen auf einer Hyperbel.



Dreisatz bei einer umgekehrt proportionaler Zuordnung:

Beispiel:

In einer Bäckerei werden täglich 280 kg Roggenvollkornmehl verarbeitet. Der Mehlvorrat ist für 15 Tage berechnet. Während der Ferienmonate geht der Verbrauch auf täglich 250 kg zurück. Wie viele Tage reicht der Vorrat nun?

Was wollen wir wissen? Für wie viele Tage reicht der Vorrat bei verringertem Verbrauch?

1. Was wissen wir? Bei einem Tagesverbrauch von 280 kg reicht es 15 Tage.
2. Schluss auf die Einheit. Bei einem Tagesverbrauch von 1 kg würde es $15 \cdot 280$ Tage reichen.

3. Schluss auf das Vielfache Bei einem Tagesverbrauch von 250 kg würde es für $\frac{15 \cdot 280}{250}$

$\frac{3 \cdot 28}{5} \text{Tage} = 16,8 \text{Tage}$ reichen.

Beispielaufgaben werden noch kommen!

Terme und Termumformungen

4. Terme und Termumformungen

4.1 Bruchterme

Zahlen und Variablen sind **Terme**. Auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Termen sind wieder Terme.

Im Nenner darf kein Term stehen, der die Zahl 0 bezeichnet!

Beispiel:

$$0,5; 8; a; x; 0,3+5; a-x; a \cdot x; x:7; (x-5) \cdot 3; \frac{8}{a^2+1}$$

Ein Term, der im Nenner mindestens eine Variable enthält, heißt **Bruchterm**.

Beispiel:

$$\frac{1}{x}; \frac{x}{x^2+1}; \frac{5}{a^2-0,2}; \frac{-7}{(x-11) \cdot (x+7,5)}$$

In der **Definitionsmenge D** eines **Bruchterms** dürfen die Zahlen nicht vorkommen, für die der Nenner 0 wird.

Beispiel:

$$\frac{x+7}{(x-3) \cdot (x+13) \cdot (x^2-1)} \quad D=\mathbb{R}/\{-13, -1, 1, 3\}$$

Alle Umformungen von Termen nach den Rechengesetzen in \mathbb{R} heißen **Termumformungen**. Terme, die durch Termumformungen ineinander übergehen, sind gleich.

4.2 Termumformungen

a) Ordnen

- Zahlen nach vorn

Beispiel:

$$a+5+b+11=16+a+b$$

- Gleiche Variablen zueinander

Beispiel:

$$5a \cdot 7ab \cdot 2ab = 70 \cdot a^3b^2$$

- Variablen in alphabetischer Reihenfolge und gleichartige Terme zueinander

$$3a^2b+4ab^2+5a^2b+2ab^2$$

b) Ausklammern

Beispiel:

$$ab+ac+ad=a(b+c+d)$$

c) Ausmultiplizieren

Beispiel:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

d) Addieren und Subtrahieren von Summen

Beispiel:

$$(a+b)+(c+d)=a+2b+c$$

e) Multiplizieren von Summen

$$(a+b) \cdot (c+d)=ac+ad+bc+bd$$

f) Umformungen mit Hilfe der binomischen Formeln

Binomische Formeln:

1. Binomische Formel

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Beispiel:

1. Binomische Formel

$$(3u+6v)^2=9u^2+36uv+36v^2$$

2. Binomische Formel

$$(xy-2x^2)^2=x^2y^2-4x^3y+4x^4$$

3. Binomische Formel

$$(2a+b^2c)=(2a-b^2c)=4a^2-b^4c^2$$

Unter einer **Minuskammer** verstehen wir einen Klammerterm, vor dem ein Minuszeichen steht, z.B. $-(x+7a-2)$.

Man löst eine Minuskammer auf, indem man sie durch eine Pluskammer ersetzt und innerhalb der Klammer alle Zeichen ändert.

Beispiel:

$$3a-(4+5b-a)-(x-7)=3a+(-4-5b+a)+(x-7)=3a-4-5b+a-x+7=3+4a-5b-x$$

4.3 Rechnen mit Bruchtermen

Gegeben seien zwei Bruchterme mit den Definitionsmengen D_1 bzw. D_2 . In der Menge D_1 und D_2 , in der kein Nenner Null wird, kann man mit Bruchtermen wie mit Brüchen rechnen.

a)

Erweitern heißt, Zähler und Nenner mit demselben Term zu multiplizieren

Beispiel:

$$\frac{2}{x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2+x}$$

Kürzen heißt, Zähler und Nenner durch denselben Term zu dividieren.

Beispiel:

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+2}$$

b)

Nennergleiche Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man die Zählerterme addiert (subtrahiert) und die Nennerterme beibehält.

Beispiel:

$$\frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-4}{x^2+1} = \frac{x+4+x-4}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Bruchterme, die nicht nennergleich sind, macht man durch Erweitern oder Kürzen nennergleich und addiert (subtrahiert) sie dann.

Beispiel:

$$\frac{\frac{1}{3}x+2}{x^2} = \frac{x}{3x^2} + \frac{6}{3x^2} = \frac{x+6}{3x^2}$$

c) Bruchterme werden multipliziert, indem man die Zählerterme multipliziert und die Nennerterme multipliziert.

Beispiel:

$$\frac{3(x+7)}{x^2+6x+8} \cdot \frac{x^2-4}{9x} = \frac{3(x+7)(x+4)(x-4)}{(x+2)(x+4) \cdot 9 \cdot x} = \frac{(x+7)(x-4)}{3x(x+2)}$$

d) **Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. Beachte dabei: Beim Kehrwert ist der ursprüngliche Zähler zum Nenner geworden. Dadurch ändert sich in der Regel die Definitionsmenge!**

Beispiel:

$$\frac{1}{x} : \frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x} \bullet \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

e) **Im Nenner stehende Wurzeln lassen sich durch geeignetes Erweitern beseitigen. Rationalmachen des Nenners:**

Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} \bullet \sqrt{10}} = \frac{1}{10} \bullet \sqrt{10}$$