Terme und Termumformungen

4. Terme und Termumformungen
4.1 Bruchterme

Zahlen und Variablen sind **Terme**. Auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Termen sind wieder Terme.
Im Nenner darf kein Term stehen, der die zahl 0 bezeichnet!

<u>Beispiel:</u>

$$0{,}5;\ 8;\ a;\ x;\ 0{,}3+5;\ a-x;\ a \bullet x;\ x:7;\ (x-5) \bullet 3; \frac{8}{a^2+1}$$

Ein Term, der im Nenner mindestens eine Variable enthält, heißt **Bruchterm**.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{1}{x}; \frac{x}{x^2+1}; \frac{5}{a^2-0{,}2}; \frac{-7}{(x-11)\bullet(x+7{,}5)}$$

In der **Definitionsmenge D eines Bruchterms** dürfen die Zahlen nicht vorkommen, für die der Nenner 0 wird.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{x+7}{(x-3)\bullet(x+13)\bullet(x^2-1)} \quad D=R/\{-13, -1, 1, 3\}$$

Alle Umformungen von Termen nach den Rechengesetzten in R heißen **Termumformungen**.
Terme, die durch Termumformungen ineinander übergehen, sind gleich.

4.2 Termumformungen

a) **Ordnen**

- Zahlen nach vorn

Beispiel:

$a+5+b+11=16+a+b$

- Gleiche Variablen zueinander

Beispiel:

$5a \bullet 7ab \bullet 2ab = 70 \bullet a^3b^2$

- Variablen in alphabetischer Reihenfolge und gleichartige Terme zueinander

$3a^2b+4ab^2+5a^2b+2ab^2$

b) **Ausklammern**

Beispiel:

$ab+ac+ad=a(b+c+d)$

c) **Ausmultiplizieren**

Beispiel:

$a(b+c+d)=ab+ac+ad$

d) **Addieren und Subtrahieren von Summen**

Beispiel:

$(a+b)+(c+d)=a+2b+c$

e) **Multiplizieren von Summen**

$(a+b)*(c+d)=ac+ad+bc+bd$

f) **Umformungen mit Hilfe der binomischen Formeln**

Binomische Formeln:

1. Binomische Formel

$\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

2. Binomische Formel

$\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

3. Binomische Formel

$\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

Beispiel:

1. Binomische Formel

$(3u+6v)^2=9u^2+36uv+36v^2$

2. Binomische Formel

$(xy-2x^2)^2=x^2y^2-4x^3y+4x^4$

3. Binomische Formel

$(2a+b^2c)=(2a-b^2c)=4a^2-b^4c^2$

Unter einer **Minusklammer** verstehen wir einen Klammerterm, vor dem ein Minuszeichen steht, z.B. $–(x+7a-2)$.
Man löst eine Minusklammer auf, indem man sie durch eine Plusklammer ersetzt und innerhalb der Klammer alle Zeichen ändert.

Beispiel:

$3a-(4+5b-a)-(x-7)=3a+(-4-5b+a)+(x-7)=3a-4-5b+a-x+7=3+4a-5b-x$

4.3 Rechnen mit Bruchtermen

Gegeben seien zwei Bruchterme mit den Definitionsmengen D_1 bzw. D_2. In der Menge D_1 und D_2, in der kein Nenner Null wird, kann man mit Bruchtermen wie mit Brüchen rechnen.

a)

Erweitern heißt, Zähler und Nenner mit demselben Term zu multiplizieren

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2x+2}{x^2+x}$$

Kürzen heißt, Zähler und Nenner durch denselben Term zu dividieren.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-3}{x+2}$$

b)

Nennergleiche Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man die Zählerterme addiert (subtrahiert) und die Nennerterme beibehält.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{x+4}{x^2+1}+\frac{x-4}{x^2+1}=\frac{x+4+x-4}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

Bruchterme, die nicht nennergleich sind, macht man durch Erweitern oder Kürzen nennergleich und addiert (subtrahiert) sie dann.

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{\frac{1}{3}x+2}{x^2}=\frac{x}{3x^2}+\frac{6}{3x^2}=\frac{x+6}{3x^2}$$

c) **Bruchterme werden multipliziert, indem man die Zählerterme multipliziert und die Nennerterme multipliziert.**

<u>Beispiel:</u>

$$\frac{3(x+7)}{x^2+6x+8}\bullet\frac{x^2-4}{9x}=\frac{3(x+7)(x+4)(x-4)}{(x+2)(x+4)\bullet 9\bullet x}=\frac{(x+7)(x-4)}{3x(x+2)}$$

d) **Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. Beachte dabei: Beim Kehrwert ist der ursprüngliche Zähler zum Nenner geworden. Dadurch ändert sich in der Regel die Definitionsmenge!**

Beispiel:

$$\frac{1}{x} : \frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x} \bullet \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

e) **Im Nenner stehende Wurzeln lassen sich durch geeignetes Erweitern beseitigen. Rationalmachen des Nenners:**

Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} \bullet \sqrt{10}} = \frac{1}{10} \bullet \sqrt{10}$$