

Quadratische Gleichungen

7. Quadratische Gleichungen

7.1 p, q-Formel

Eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ kann man durch Division mit a stets auf die **Normalform einer quadratischen Gleichung** $x^2+px+q=0$ bringen.

Die Lösung der quadratischen Gleichung in Normalform sind gegeben durch: die **Lösungsformel**:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Gleichung hat

- zwei Lösungen $x_1; x_2$, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$
- genau eine Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$
- keine Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

Beispiele:

1. Fall:

$$x^2+5x+4=0; L=\{-1; -4\}, \text{ denn}$$

$$x_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 2,4} = -2,5 \pm 1,5 = -1 / -4$$

2. Fall:

$$x^2-5x+6,25=0; L=\{2,5\}, \text{ denn}$$

$$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6,25} = 2,5 \pm 0 = 2,5$$

3. Fall:

$$x^2+5x+9=0; L=\{\}, \text{ denn}$$

$x_1 = -2,5 + \sqrt{2,5^2 - 9}$, die Quadratwurzel $\sqrt{2,5^2 - 9}$ ist negativ und somit nicht definiert, weil $2,5^2 - 9 < 0$.

7.2 Reinquadratische Gleichungen

Reinquadratische Gleichungen

Beispiel:

$$x^2=7$$

$$x_1 = \sqrt{7}$$

$$x_2 = -\sqrt{7}$$

Vor einer Wurzel kann immer ein + Zeichen oder ein – Zeichen stehen. Darauf bitte achten.

7.3 Quadratische Gleichungen ohne konstantes Glied

Quadratische Gleichungen ohne konstantes Glied **löst man durch Ausklammern.**

Beispiel:

$$x^2+8x=0$$

$$x(x+8)=0$$

$$x_1=0 \text{ und } x_2=-8$$

Satz von Vieta

Die reellen Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann Lösungen der Gleichung $x^2+px+q=0$, wenn für die Koeffizienten p und q gilt: $p=-(x_1+x_2)$ und $q=x_1 \cdot x_2$.