

Polynomdivision

In diesem Abschnitt bringe ich euch die Polynomdivision bei...

Die Polynomdivision braucht ihr, um Nullstellen von Polynomen zu berechnen, denn hier gibt es keine Formel mehr wie bei quadratischen Funktionen...

Es heißt also: Rechnen und deshalb sollte man dieses Verfahren auch beherrschen... ☺

Aufgabe:

Bestimme die Nullstellen der ganzrationalen Funktion f mit

$$a) f(x)=(x-3)(x+4)(x-0,5) \quad b) f(x)=x^3+2x^2-104x+192$$

Lösungen:

a) Die Nullstellen sind die Lösung der Gleichung $f(x)=0$.

$$(x-3)(x+4)(x-0,5)=0$$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Das heißt hier:

$$x-3=0 \text{ oder } x+4=0 \text{ oder } x-0,5=0$$

$$x=3 \text{ oder } x=-4 \text{ oder } x=0,5.$$

Die Faktoren in dem Produkt $(x-3)(x+4)(x-0,5)$ sind lineare Terme, man nennt sie auch

Linearfaktoren.

Und so muss man jedes Polynom umformen, um die Nullstellen zu berechnen, denn es gibt dafür keine Formel wie z.B. die p, q-Formel bei quadratischen Funktionen.

b) In der Teilaufgabe a) ließen sich die Nullstellen mit Hilfe der Linearfaktoren bestimmen.

Wir müssen also versuchen den Term $f(x)=x^3+2x^2-104x+192$ in ein Produkt von Linearfaktoren zu zerlegen. Beim Aufstellen einer Wertetabelle findet man zufällig eine Nullstelle für $x=2$.

Zu der Nullstelle 2 gehört der Linearfaktor $(x-2)$.

Also müssen wir $f(x)=x^3+2x^2-104x+192$ durch $(x-2)$ dividieren:

$$x^3+2x^2-104x+192=(x-2) \cdot g(x)$$

$$x^3+2x^2-104x+192:(x-2)=x^2+4x-96$$

$$-(x^3-2x^2)$$

$$4x^2-104x+192$$

$$-(4x^2-8x)$$

$$-96x+192$$

$$-(96x+192)$$

$$0$$

Die Division bei den Polynomen führt zu

$$x^3+2x^2-104x+192:(x-2)=x^2+4x-96$$

$$x^3+2x^2-104x+192=(x-2) \cdot (x^2+4x-96)$$

Wir benutzen diese Umformung, um alle Nullstellen zu bestimmen:

$$(x-2) \cdot (x^2+4x-96)=0$$

$$x-2=0 \text{ oder } x^2+4x-96=0$$

$$x=2 \text{ oder } x=8 \text{ oder } x=-12$$

Begründung der Polynomdivision:

$$x^3+2x^2-104x+192 \quad |x^2+2x^2=(x-2)(x^2+4x^2)$$

$$=(x-2)x^2+4x^2-104x+192 \quad |4x^2-104x=(x-2)4x-96x$$

$$=(x-2)x^2+(x-2)4x-96x+192 \quad |-96x+192=(x-2)4x-96x$$

$$=(x-2)x^2+(x-2)4x+(x-2)(-96) \quad |Ausklammern \text{ von } (x-2)$$

$$=(x-2)(x^2+4x-96)$$

Weiterhin kann man auch die weiteren Nullstellen durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

$$x^3 + 2x^2 - 104x + 192 = (x + 2)(x^2 + 4x - 96)$$

$$x^2 + 4x - 96 = (x - 8)(x - a)$$

$$x^2 + 4x - 96 = x^2 - xa - 8a + 8a$$

$$x^2 + 4x - 96 = x^2 + (-a - 8)x + 8a$$

$$4 = -a - 8 \rightarrow a = -12$$

$$-96 = 8a \quad | :8$$

$$a = -12$$

Aufgaben zur Polynomdivision

1) Führe die Polynomdivision aus.

a) $x^3-4x^2-16x+15:(x+3)$ b) $3x^3-11x^2-13x+36:(x-4)$

Lösungen:

1)

a)

$$x^3-4x^2-16x+15:(x+3)=x^2-7x+5$$

$$-(x^2+3x^2)$$

$$-7x^2-16x$$

$$-(-7x^2-21x)$$

$$5x+15$$

$$-(5x+15)$$

$$0$$

b)

$$3x^3-11x^2-13x+36:(x-4)=3x^2+x-9$$

$$-(3x^3-12x^2)$$

$$x^2-13x$$

$$-(x^2-4x)$$

$$-9x+36$$

$$-(-9x+36)$$

$$0$$

*Aufgaben zu Gleichungen**2. Welche der Punkte*

$P(-8;3), P(2;-2), P(-1;-4), P(-4;-7), P(-4;4), P(1;5), P(0,8;-2,2)$
gehören zum Graphen der linearen Funktion mit der Gleichung

a) $y=x-3$ b) $y=2,4x+2,6$ c) $y=x/4+5$ d) $y=-x/2-1$ e) $y=2-3x$?

Zeichne den Graphen. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkt mit der 1. Koordinatenachse und mit der 2. Koordinatenachse.

3. Durch die Gleichung a) $y=r*x+2$ b) $y=1,2x+r$ ist eine Schar von Geraden gegeben. Welchen Wert muss man für den Parameter r wählen, damit die zugehörige Gerade durch den Punkt $P(2; 1)$ geht?

8. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte P_1 und P_2 ; die Gerade g_2 geht durch den Punkt P_3 und hat die Steigung m .
Bestimme den Schnittpunkt beider Geraden und berechne dessen Abstand vom Koordinatenursprung.

a) $P_1(-1;-5), P_2(6;2), P_3(-2;-4), m=2$ b) $P_1(2;4), P_2(-6;0), P_3(9;2), m= 1/3$

Lösungen:

2)

a)

Nein, Nein, Ja, Ja, Nein, Nein, Ja

b)

Nein, Nein, Nein, Ja, Nein, Ja, Nein

3)

a)

$$y = rx + 2$$

$$1 = 2r + 2 \quad | -2$$

$$-1 = 2r \quad | :2$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

$$y = x - 3$$

$$0 = x - 3 \quad | +3$$

$$x = 3$$

$$(3; 0)$$

$$y = 0 - 3$$

$$y = -3$$

$$(0; -3)$$

$$y = 2,4x + 2,6$$

$$y = 2,6$$

$$(0; 2,6)$$

$$0 = 2,4x + 2,6$$

$$-2,6 = 2,4x$$

$$x = -\frac{13}{12}$$

$$\left(-\frac{13}{12}; 0\right)$$

8)

a)

$$P_1(-1; -5), P_2(6; 2)$$

$$y + 5 = \frac{2+5}{6+1}(x+1)$$

$$y + 5 = x + 1 \mid -5$$

$$y = x - 4$$

$$P_3(-2; -4), m=2$$

$$y + 4 = 2(x + 2)$$

$$y + 4 = 2x + 4 \mid -4$$

$$y = 2x$$

$$x - 4 = 2x \mid -x$$

$$x = -4$$

$$y = 2(-4) = -8$$

$$S(-4; -8)$$

$$d = \sqrt{80} = 8,944$$