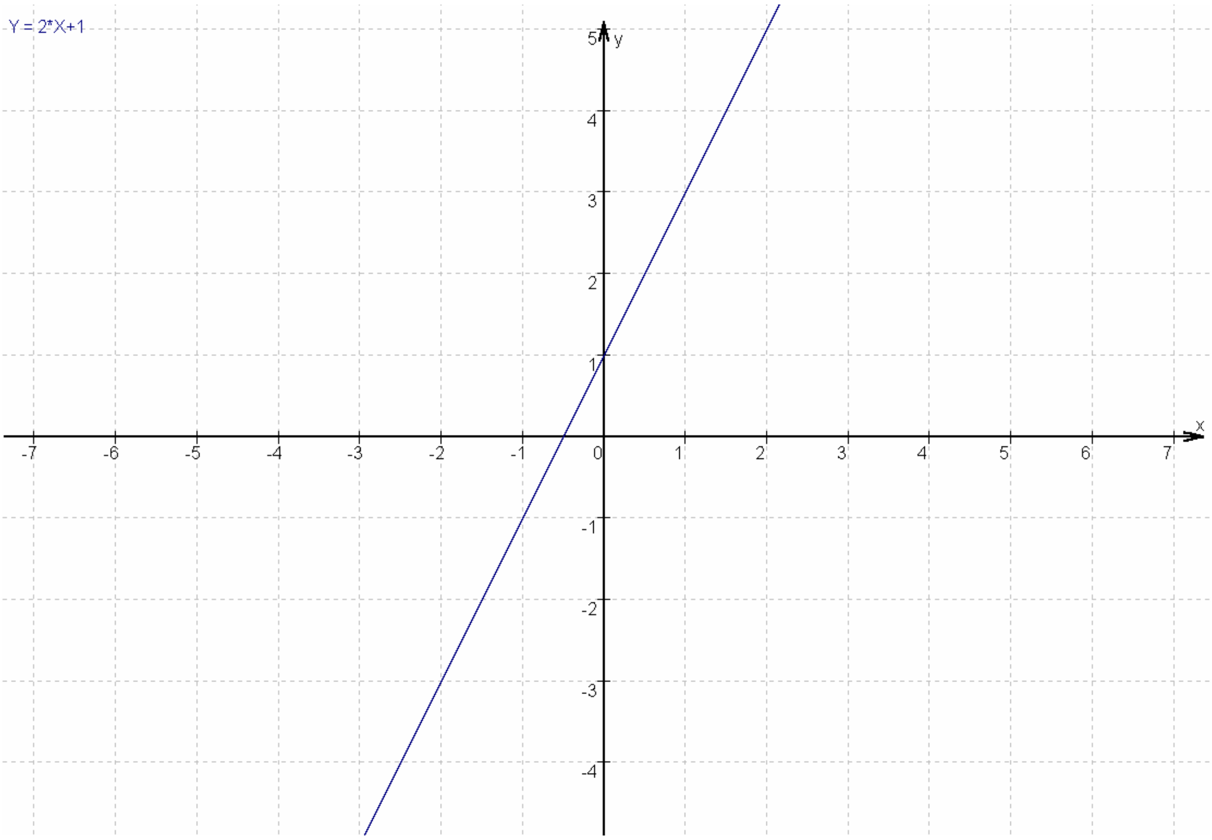
Definition der Ableitung

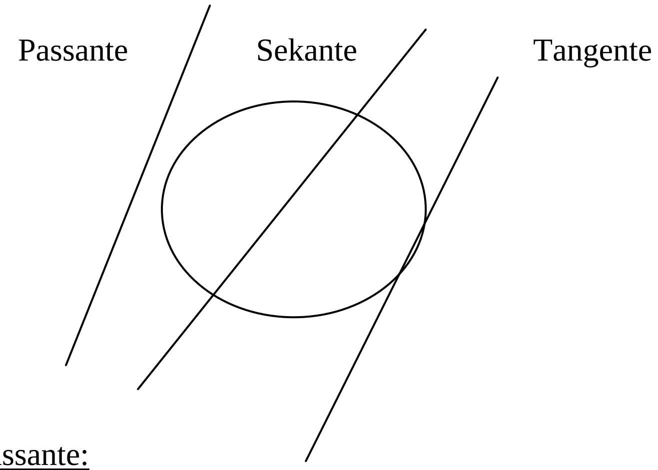
1. Wiederholung



$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$m = \tan\alpha$$

Die Steigung ist durch den Tangens des Neigungswinkels definiert.

2. Begriffe:



Passante:

Berührt den Kreis in keinem Punkt.

Sekante:

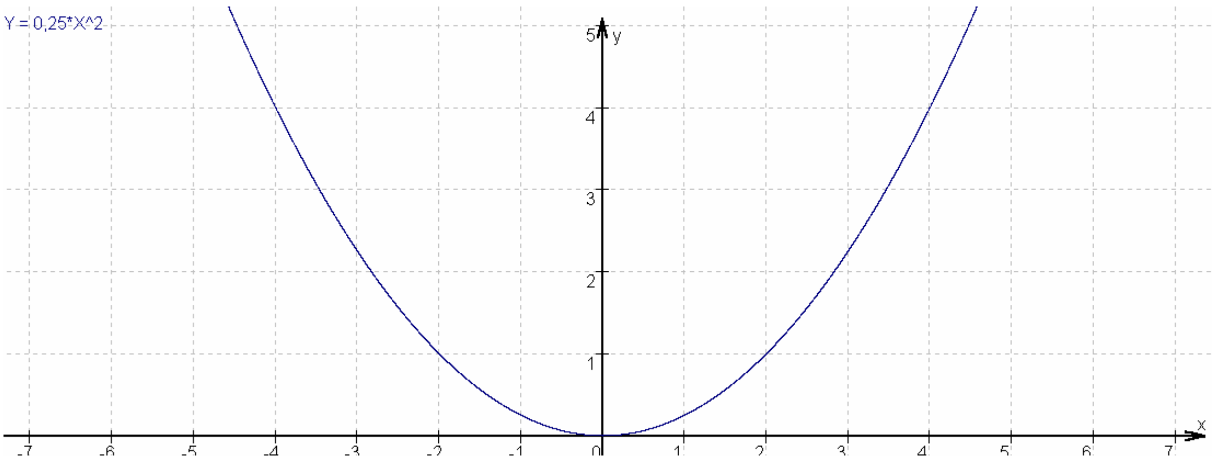
Berührt den Kreis in zwei Punkten.

Tangente

Berührt den Kreis senkrecht in einem Punkt.

3. Differentialquotienten

1. Bestimme die Steigung der Geraden.



Lösungen:

Vorgehensweise:

1. Zuerst wählen wir uns zwei Punkte, die auf dem Graphen liegen und berechnen dadurch die Steigung m an diesen Punkten.

(2; 1); (2,5; 1,5625)

$$m = \frac{1,5625 - 1}{2,5 - 2}$$

$$m = \frac{0,5625}{0,5} = 1,12$$

(2; 1); (2,25; 1,265625)

$$m = \frac{1,265625 - 1}{2,25 - 2}$$

$$m = \frac{0,265625}{0,25} = 1,0625$$

Allgemein:

$$m = \frac{\frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{4}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{\frac{1}{4}(2+h)^2 - \frac{1}{4} \bullet 2^2}{2 + h - 2} = \frac{\frac{1}{4}(4 + 4h + h^2) - 1}{h} = \frac{1 + h + \frac{1}{4}h^2 - 1}{h} = \frac{h(1 + \frac{1}{4})}{h} = 1 + \frac{1}{4}$$

Der Punkt P_1 nähert sich dem Punkt P_0.
Die Sekante wird zur Tangente.

1. Berechne die Steigung für x=1.

Lösungen:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2 - \frac{1}{4} \bullet 1^2}{2+h-2} = \frac{\frac{1}{4}(1+2h+h^2) - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}}{h} = \frac{h(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Bestimmung der Ableitung

1. Berechne den Differenzenquotienten für y= ¼ x² an der Stelle x=2.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{x+h-x} = \frac{\frac{1}{4}(x^2+2xh+h^2) - \frac{1}{4}x^2}{h} = \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{h(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h)}{h} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}h$$

h	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	1,5
1	1,25
0,0001	1,000025
h→0	1

2. Worin besteht der Unterschied bei $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(1+\frac{1}{4}h)}{h}$ *und* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}h$ *?*

Lösungen:

Bei $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(1+\frac{1}{4}h)}{h}$ ist h=0 nicht definiert.

Bei $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}h$ ist h=0 definiert.

Grenzwert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x$$

Die Ableitungsfunktion gibt die Steigung der Tangente der Funktion an.

Vorgehensweise:

Bei $y=x^2$

1. Möglichkeit (h-Methode):

1. Bildung des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} == \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

2. Bildung der Ableitung

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$f'(x) = 2x$$

2. Möglichkeit (Zwei-Punkte-Methode):

1. Bildung des Differenzenquotienten

$$\frac{y-y}{x-x}=\frac{x^2-x^2}{x-x}=\frac{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=x_1+x_0$$

2. Bildung der Ableitung

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}2x$$
$$f'(x)=2x$$

Bestimmung der Ableitung

1. Berechne die Ableitung der Funktion y= ½ x² und zeichne beide Graphen.
Lösungen:

Vorgehensweise:

Bei y=x²

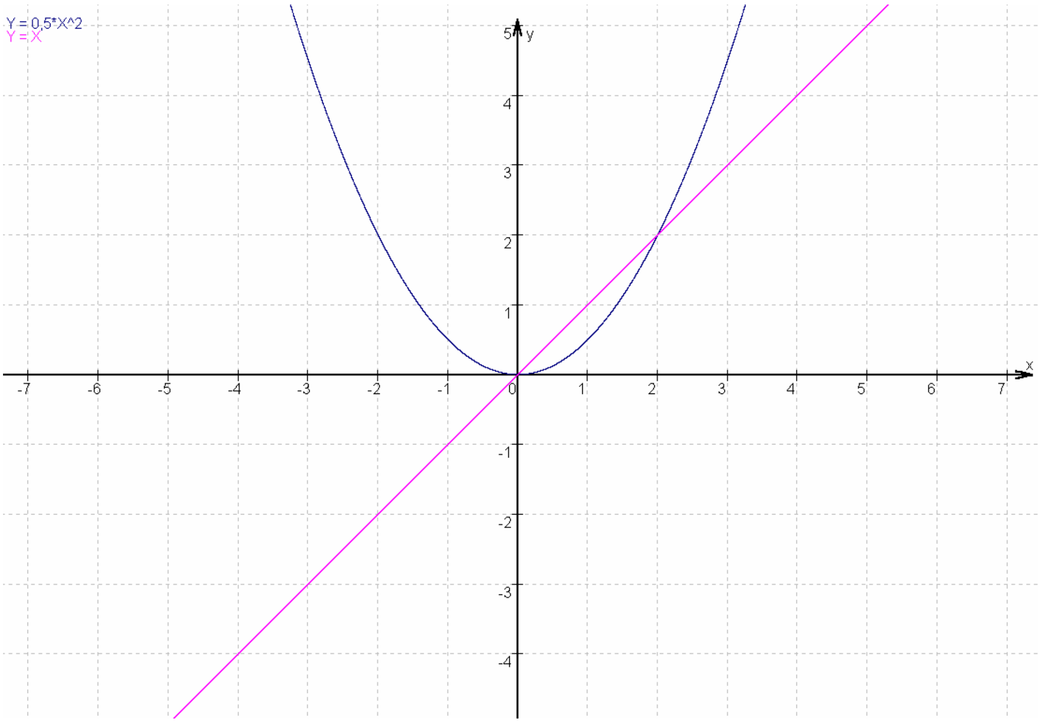
1. Möglichkeit:

1. Bildung des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}(x+h)^2-\frac{1}{2}x^2}{x+h-x}=\frac{\frac{1}{2}(x^2+2xh+h^2)-\frac{1}{2}x^2}{h}==\frac{\frac{1}{2}x^2+xh+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}x^2}{h}$$
$$=\frac{h(x+\frac{1}{2}h)}{h}=x+\frac{1}{2}h$$

2. Bildung der Ableitung

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}x+\frac{1}{2}h$$
$$f'(x)=x$$



Y = 0,5*X^2
Y = X
y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

Berechnung der Ableitung:

1. $f(x)=x^3$

1. Möglichkeit:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_1^3-x_0^3}{x_1-x_0}$$

Polynomdivision:

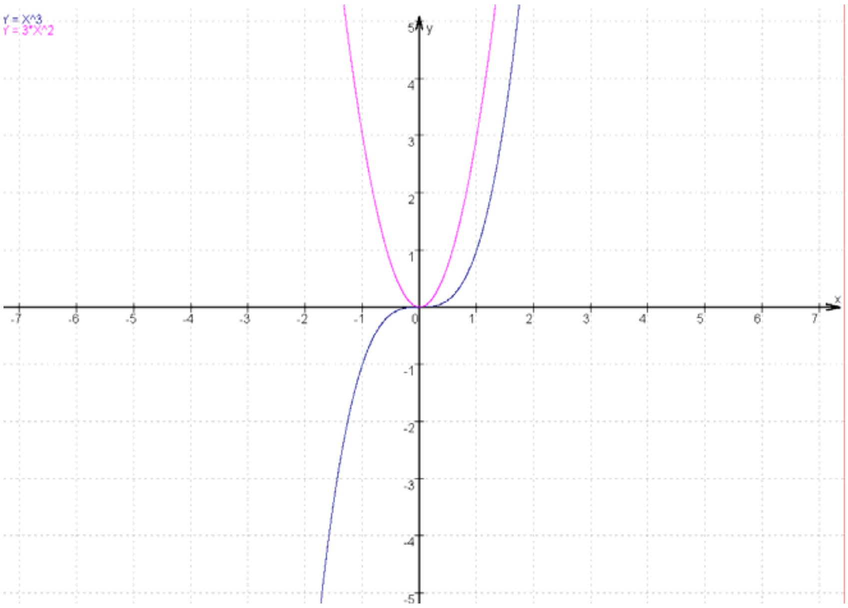
$$x_1^3-x_0^3:(x_1-x_0)=x_1^2+x_1x_0+x_0^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_1^3-x_0^3}{x_1-x_0}=x_1^2+x_1x_0+x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}3x^2$$

Ableitung:

$$f'(x)=3x^2$$



2. Möglichkeit:

1. Bildung des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0{}^3}{x_0 + h - x_0} = \frac{x_0{}^3 + h^3 + 3x_0{}^2h + 3x_0h^2 - x_0{}^3}{h}$$

$$= \frac{h^3 + 3x_0{}^2h + 3x_0h^2}{h} = \frac{h(h^2 + 3x_0{}^2 + 3x_0h)}{h} = h^2 + 3x_0{}^2 + 3x_0h$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2$$

$$f'(x) = 3$$

Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2$$

Wie ihr seht, es gibt zwei verschiedene Wege.
Ihr müsst selber entscheiden, welcher von beiden für euch persönlich der Einfachste ist. ☺

Berechnung der Ableitung:

2. f(x)=x4

h-Methode:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{(x_0+h)^4-x_0{}^4}{x_0+h-x_0}=\frac{x_0{}^4+h^4+4x_0{}^3h+6x^2h^2+4xh^3-x_0{}^4}{h}$$

$$=\frac{h^4+4x_0{}^3h+6x^2h^2+4xh^3}{h}=\frac{h(h^3+4x_0{}^3+6x_0{}^2h+4xh^2)}{h}=h^3+4x^3+6x^2h+4xh^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}4x^3$$

$$f'(x)=4x^3$$

Ableitung:

$$f'(x)=4x^3$$

Berechnung der Ableitung:

3. f(x)=1/x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\frac{x0}{x1x0}-\frac{x1}{x1x0}}{x1-x0}=\frac{\frac{x0-x1}{x1x0}}{x1-x0}=\frac{x0-x1}{x1x0(x1-x0)}=-\frac{1}{x1x0}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Ableitung:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Verallgemeinerung zu einer Formel

Verallgemeinerung: $y=x^n$; $y'=nx$ und $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$

y	y'
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^n	nx^{n-1}
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-n}	nx^{n-1}

Berechnung der Ableitung:

1. $f(x)=x^3$

1. Möglichkeit:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0}$$

Polynomdivision:

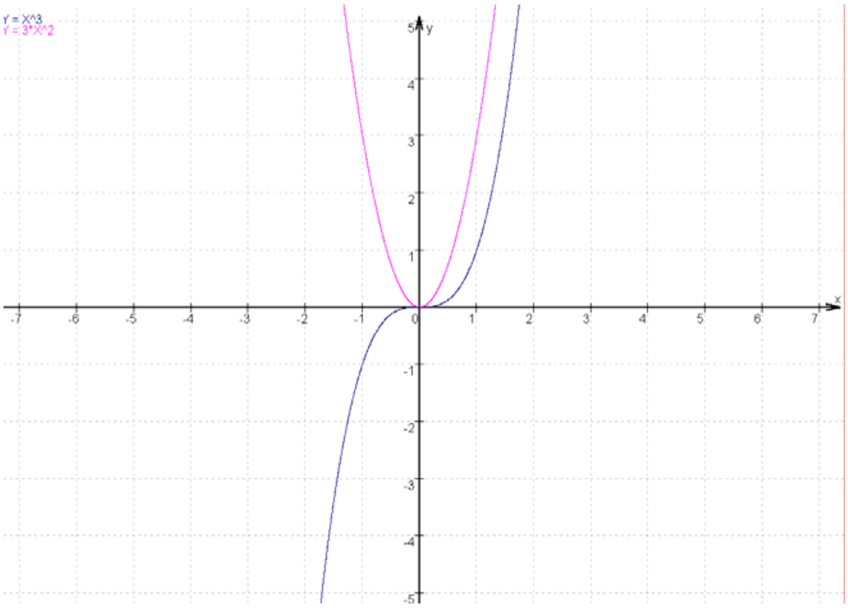
$$x_1^3 - x_0^3 : (x_1 - x_0) = x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2$$

Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2$$



Ableitung und Funktion sind in einem Bild gezeichnet.

<u>2. Möglichkeit:</u>

<u>1. Bildung des Differenzenquotienten:</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0{}^3}{x_0 + h - x_0} = \frac{x_0{}^3 + h^3 + 3x_0{}^2h + 3x_0h^2 - x_0{}^3}{h}$$

$$= \frac{h^3 + 3x_0{}^2h + 3x_0h^2}{h} = \frac{h(h^2 + 3x_0{}^2 + 3x_0h)}{h} = h^2 + 3x_0{}^2 + 3x_0h$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2$$

$$f\,'(x) = 3$$

<u>Ableitung:</u>

$$f\,'(x) = 3x^2$$