Berechnung der Ableitung:

2. f(x)=x^4

h-Methode:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{(x_0+h)^4-x_0{}^4}{x_0+h-x_0}=\frac{x_0{}^4+h^4+4x_0{}^3h+6x^2h^2+4xh^3-x_0{}^4}{h}$$
$$=\frac{h^4+4x_0{}^3h+6x^2h^2+4xh^3}{h}=\frac{h(h^3+4x_0{}^3+6x_0{}^2h+4xh^2)}{h}=h^3+4x^3+6x^2h+4xh^2$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}4x^3$$
$$f'(x)=4x^3$$

Ableitung:

$$f'(x)=4x^3$$

Berechnung der Ableitung:

3. f(x)=1/x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\frac{x0}{x1x0}-\frac{x1}{x1x0}}{x1-x0}=\frac{\frac{x0-x1}{x1x0}}{x1-x0}=\frac{x0-x1}{x1x0(x1-x0)}=-\frac{1}{x1x0}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Ableitung:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Verallgemeinerung: $y=x^n$; $y'=nx$ und $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$

y	y’
c	0
x	1
x^2	2x
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^n	nx^{n-1}
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-n}	nx^{n-1}

Berechnung der Ableitung

1. Berechne die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$.

Lösungen:

Vorgehensweise:

1. Zuerst wird der Definitionsbereich definiert.

$$y = \sqrt{x}; D = \{x \mid x \geq 0\}$$

2. Danach berechnet man den Differenzenquotienten.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$
$$= \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

3. Nun bildet man den Grenzwert.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Ableitungsregel

$y = x^n; y' = nx^{n-1}$

Anwendung auf das Beispiel:

Aufgabe:

1. Berechne mit der Ableitungsregel die Ableitung der Funktion y=0,25x².

Lösungen:

$$y = \frac{1}{4}x^2; y = x^2$$
$$y' = \frac{1}{4} \bullet 2x; y' = 2x$$

2. Berechne mit Hilfe der Ableitungsregel die Ableitung der Funktion y=3x³.

Lösungen:

$$y = 3x^3; y = x^3$$
$$y' = 3 \bullet 3x^2 = 9x^2; y' = 3x^2$$