Berechnung der Ableitung mit der h-Methode

1. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ *mit der h-Methode an der Stelle x=a.*

Lösungen:

$$f(x)=\sqrt{x};\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{a-a+h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Berechne die Ableitung der Funktion f(x)=1/x mit der h-Methode an der Stelle x=a.

$$f(x)=\frac{1}{x};\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a}{(a+h)a}-\frac{(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h}=\frac{\frac{-h}{(a+h)a}}{h}=-\frac{1}{(a+h)a}$$

$$\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(a+h)a}=-\frac{1}{a^2}$$

3. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ *mit der h-Methode an der Stelle x=a.*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}};\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{h}=\frac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}}}{h}=\ldots=\frac{-2\sqrt{a}}{a^2}$$

$$\lim_{h\to 0}=2a^{\frac{-3}{2}}$$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

Aufgaben zur Ableitung

Buch Seite 132 Nr. 3

3. In welchem Punkt schneiden sich die Tangenten an den Graphen der Funktion f in den Punkten P_1 und P_2? Wie groß ist der Schnittwinkel?

a) $f(x)=x^2$; $P_1(1; y)$, $P_2(2 ; y)$ b) $f(x)=x^5$; $P_1(3 ; y)$, $P_2(-2 ; y)$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

Lösungen :

3)

a) $f(x)=x^2$; $P_1(1; y)$, $P_2(2 ; y)$

$$
\begin{aligned}
&y = x^2\\
&y' = 2x; P(1;1); P(2;4)\\
&m = y' = 2x = 2 \bullet 1 = 2\\
&1 = 2 + b \mid -2\\
&b = -1\\
&y = 2x - 1\\
&y' = 2x; P(1;1); P(2;4)\\
&m = y' = 2x = 2 \bullet 2 = 4\\
&4 = 4 \bullet 2 + b\\
&4 = 8 + b \mid -8\\
&b = 1\\
&y = 4x - 4\\
&2x - 1 = 4x - 4 \mid +1\\
&2x = 4x - 3 \mid -4x\\
&-2x = -3 \mid : (-2)\\
&x = \frac{3}{2}\\
&y = 2 \bullet \frac{3}{2} - 1 = 3 - 1 = 2\\
&(\frac{3}{2}; 2)
\end{aligned}
$$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

b) $f(x)=x^5$; $P_1(3 ; y)$, $P_2(-2 ; y)$

$$y = x^5$$
$$y' = 5x^4; P(3;243); P(-2;-32)$$
$$m = y' = 5x^4 = 5 \bullet 3^4 = 5 \bullet 81 = 405$$
$$243 = 405 \bullet 3 + b \,|\, -2$$
$$b = -972$$
$$y = 405x - 972$$
$$y' = 5x^4; P(3;243); P(-2;-32)$$
$$m = y' = 5x^4 = 5 \bullet (-2)^4 = 80$$
$$-32 = 80 \bullet (-2) + b$$
$$-32 = -160 + b \,|\, +160$$
$$b = 128$$
$$y = 80x + 128$$
$$405x - 972 = 80x + 128 \,|\, +1$$
$$x = \frac{44}{13}$$
$$(\frac{44}{13}; y)$$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

Aufgaben zur Ableitung

7) An den Graphen der Funktion $y=x^2$ sind zwei Tangenten gezeichnet. Sie schneiden die x-Achse unter einem Winkel von 30° bzw. 60°. Zusammen mit der x-Achse bilden sie ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt.

Lösungen:

7)

Vorgehensweise:

1. Folgendes muss man bei dieser Aufgabe wissen:
Die Steigung m ist der Tangens des Neigungswinkels, es ist:

$$m = \tan\alpha$$

2. Wir brauchen die Steigung und einen Punkt.
Die Steigung können wir mit $m = \tan\alpha$ berechnen.

$$m = \tan\alpha = y' = \tan(30°) = 0{,}577$$
$$m = \tan\alpha = y' = \tan(60°) = 1{,}732$$

3. Nun berechnet man die Ableitung y'=2x.

$$m = \tan\alpha = y' = \tan(30°) = 0{,}577 = 2x$$
$$m = \tan\alpha = y' = \tan(60°) = 1{,}732 = 2x$$

4. Nun formt es nach x um.

$$0{,}577 = 2x \,|:2$$
$$x = 0{,}289$$
$$1{,}732 = 2x \,|:2$$
$$x = 0{,}866$$

5. Den y-Wert berechnet wir, indem wir den x-Wert in $y=x^2$ einsetzen.

$$x = 0{,}289$$
$$y = 0{,}289^2 = 0{,}83$$

$$x = 0{,}866$$
$$y = 0{,}866^2 = 0{,}75$$

6. Nun haben wir einen Punkt und die Steigung.

$y_1=0{,}577x+0{,}6663$
$y_2=1{,}732x-0{,}75$

7. Zum weiteren Vorgehen :

1. Gleichsetzen der beiden Tangentengleichungen.
2. Berechnen der Strecken des Dreiecks
3. Anwenden der Formel $A_{Dreieck} = \frac{g \bullet h}{2}$

Und schon hat man den Flächeninhalt des Dreiecks.

Ihr seht, wenn man bei einer etwas umfangreichen Aufgabe strukturiert vorgeht, kann man die Aufgabe „ganz leicht" lösen.
Leicht ist aber relativ. ☺

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]