

1. Gleichsetzungsverfahren

Aufgabe:

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

a) $45x+75y=58,5$ und $20x+40y=29$

Lösung:

$45x+75y=58,5$ und $20x+40y=29$

1. Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst.

$$\begin{aligned} 45x+75y &= 58,5 & | -45x \\ 75y &= -45x+58,5 & | :75 \\ y &= -45/75+58,5/75 \\ y &= -0,6x+0,78 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20x+40y &= 29 & | -20x \\ 40y &= -20x+29 & | :40 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{29}{40} \\ y &= -0,5x+0,725 \end{aligned}$$

2. Wenn wir die Graphen zeichnen, bekommen wir einen ungenauen Schnittpunkt. Deswegen berechnen wir es. Deshalb wenden wir das **Gleichsetzungsverfahren** an und setzen beide Gleichungen gleich und lösen sie nach x auf.!

$$\begin{aligned} -0,6x+0,78 &= -0,5x+0,725 & | +0,6x \\ 0,78 &= 0,1+0,725 & | -0,725 \\ 0,055 &= 0,1x & | \cdot 10 \\ x &= 0,55 \end{aligned}$$

Nun brauchen wir diesen x-Wert nur noch in eine der beiden aufgelösten Gleichungen einzusetzen und y berechnen.

$$\begin{aligned} x &= 0,55 \\ y &= 0,45 \end{aligned}$$

Zusammenfassung des Gleichsetzungsverfahrens

Wir stellen das Gleichsetzungsverfahren noch mal dar:

$$(I) 2x+y=11 \text{ und } (II) x-3y=-5$$

1. Schritt:

Wir lösen die beiden Gleichungen nach y auf.

$$y=-2x+11 \text{ und } y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

2. Schritt:

Wir setzen die beiden Terme, die x enthalten, gleich. (Denn $y=y$.)

$$-2x+11=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

3. Schritt:

Wir lösen die Gleichung nach der Variablen x auf.

$$\begin{array}{rcl} -2x+11 & = & \frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \quad | \cdot 3 \\ -6x+33 & = & x+5 \quad | +6x \\ 33 & = & 7x+5 \quad | -5 \\ 28 & = & 7x \quad | :7 \\ x & = & 4 \end{array}$$

4. Schritt:

Wir setzen diesen x -Wert in die Gleichung ein.

$$y=-2 \cdot 4+11=3$$

5. Schritt:

Wir schreiben die Lösungsmenge auf.

$$L=\{4; 3\}$$

6. Schritt:

Wir überprüfen es.

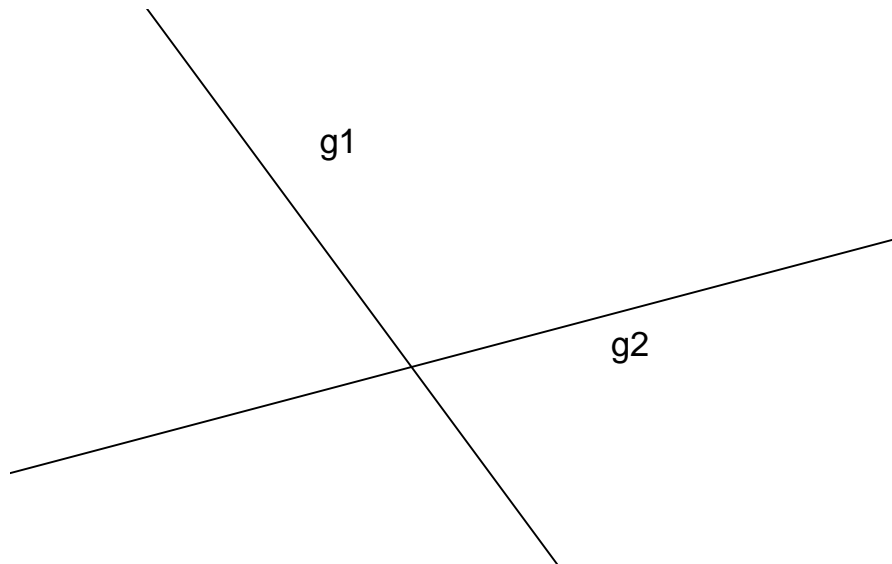
$$2 \cdot 4+3=8+3=11$$

$$4-3 \cdot 3=4-9=-5$$

Auch beim Gleichsetzungsverfahren gibt es wieder 3 Fallunterscheidungen:

1. Möglichkeit / 1. Fall:

Es gibt ein Schnittpunkt und die Aufgabe hat nur eine Lösung, bzw. die Geraden haben einen Schnittpunkt.



2. Möglichkeit / 2. Fall:

Es gibt keine Lösung, die Graphen laufen parallel.



3. Möglichkeit / 3. Fall:

Es gibt viele Lösungen, wenn überall ein Schnittpunkt ist, d.h die Graphen und ihre Funktionsgleichungen sind identisch.



Aufgaben zum Verfestigen des Themas : Gleichsetzungsverfahren:

1) Berechne den Schnittpunkte der beiden Gleichungen mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $y=3x+22$ und $y=5x+14$

b) $y=3x+8$ und $y=0,5x+2$

c) $4x+2y=18$ und $7x-y=13$

d) $8x-4y=-3$ und $14x-2y=8,5$

Lösung:

a)

$$y=3x+22 \text{ und } y=5x+14$$

$$3x+22=5x+14 \quad |-14$$

$$3x+8=5x \quad |-3x$$

$$8=2x \quad |:2$$

$$x=4$$

$$3 \cdot 4 + 22 = 12 + 22 = 34$$

$$L = \{4 ; 34\}$$

b)

$$y=3x+8 \text{ und } y=0,5x+2$$

$$3x+8=0,5x+2 \quad |-2$$

$$3x+6=0,5x \quad |-3x$$

$$6=-2,5x \quad | :(-2,5)$$

$$x=-2 \frac{2}{5}$$

$$3 \cdot \left(-2 \frac{2}{5}\right) + 8 = -7 \frac{1}{5} + 8 = \frac{4}{5}$$

$$L = \left\{-2 \frac{2}{5} ; \frac{4}{5}\right\}$$

c)

$$4x+2y=18 \text{ und } 7x-y=13$$

$$\begin{array}{l} 4x+2y=18 \quad | -4x \\ 2y=-4x+18 \quad | :2 \\ y=-2x+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7x-y=13 \quad | -7x \\ -y=-7x+13 \quad | \cdot (-1) \\ y=7x-13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2x+9=7x-13 \quad | +13 \\ -2x+22=7x \quad | +2x \\ 22=9x \quad | :9 \\ x=2\frac{4}{9} \end{array}$$

$$-2 \cdot 2\frac{4}{9} + 9 = -4\frac{8}{9} + 9 = 4\frac{1}{9}$$

$$L = \left\{ -\frac{4}{9} ; 4\frac{1}{9} \right\}$$

d)

$$8x-4y=-3 \text{ und } 14x-2y=8,5$$

$$\begin{array}{l} 8x-4y=-3 \quad | -8x \\ -4y=-8x-3 \quad | :(-4) \\ y=2x+\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14x-2y=8,5 \quad | -14x \\ -2y=-14x+8,5 \quad | :(-2) \\ y=7x-4,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x+\frac{3}{4}=7x-\frac{17}{4} \quad | -\frac{3}{4} \\ 2x=7x-5 \quad | -7x \\ -5x=-5 \quad | :(-5) \\ x=1 \end{array}$$

$$2 \cdot 1 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$L = \left\{ 1 ; 2\frac{3}{4} \right\}$$

Aufgaben zum Verfestigen des Themas : Gleichsetzungsverfahren:

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

a) $10x-7y+4=0$ und $6x-5y=-2$

1. Schritt: Auslösen der beiden Gleichungen nach y:Rechnung:

$$\begin{aligned}
 10x-7y+4=0 & \quad | -4 \\
 10x-7y &= -4 \quad | -10x \\
 -7y &= -10x-4 \quad | :(-7) \\
 y &= 1\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6x-5y &= -2 \quad | -6x \\
 -5y &= -6x-2 \quad | :(-5) \\
 y &= 1\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II und Auflösen der Gleichung nach x:

$$\begin{aligned}
 1\frac{3}{7}x + \frac{4}{7} &= 1\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \quad | -\frac{4}{7} \\
 1\frac{3}{7}x &= 1\frac{1}{5}x - \frac{6}{35} \quad | -1\frac{1}{5}x \\
 \frac{8}{35}x &= -\frac{6}{35} \quad | : \frac{8}{35} \\
 x &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

3. Einsetzen von x in I

$$y = \frac{10}{7} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{4}{7} = -\frac{30}{28} + \frac{16}{28} = -\frac{14}{28} = -\frac{1}{2}$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \left\{-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$$

1) Berechne den Schnittpunkte der beiden Gleichungen.

a) $6y=9x-81$ und $6x-4y=12$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned} 6y &= 9x - 81 & | :6 \\ y &= 1\frac{1}{2}x - 13\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x - 4y &= 12 & | -6x \\ -4y &= -6x + 12 & | :(-4) \\ y &= -1\frac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2}x - 13\frac{1}{2} &= 1\frac{1}{2}x - 3 & | +13\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2}x &= 1\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2} & | -1\frac{1}{2}x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \{ \}$$

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen

a) $4x-7y=41$ und $5x+3y=63$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned} 4x-7y &= 41 & | -4x \\ -7y &= -4x+41 & | :(-7) \\ y &= \frac{4}{7}x + 5\frac{6}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 63 & | -5x \\ 3y &= -5x+63 & | :3 \\ y &= -1\frac{2}{3}x + 21 \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned} \frac{4}{7}x - 5\frac{6}{7} &= -1\frac{2}{3}x + 21 & | +5\frac{6}{7} \\ \frac{4}{7}x &= -1\frac{2}{3}x + 26\frac{6}{7} & | +1\frac{2}{3}x \\ \frac{47}{21}x &= \frac{168}{7} & | : \frac{47}{21} \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. Einsetzen von x in I

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} - 5\frac{6}{7} = \frac{3}{7} - 5\frac{6}{7} = -5\frac{3}{7}$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \left\{ \frac{3}{4}; -5\frac{3}{7} \right\}$$

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

a) $x+3y=24$ und $x-y=-2$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned}x+3y=24 & \quad | -x \\3y=-x+24 & \quad | :3 \\y=-\frac{1}{3}x+8 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x-y=-2 & \quad | -x \\-y=-x-2 & \quad | -(-1) \\y=x+2 & \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}x+8=x+2 & \quad | -8 \\-\frac{1}{3}x=x-6 & \quad | -x \\-1\frac{1}{3}x=-6 & \quad | :(-1\frac{1}{3}) \\x=4,5 & \end{aligned}$$

3. Einsetzen von x in I

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} + 8 = -1\frac{1}{2} + 8 = 6\frac{1}{2}$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \left\{ 4, 5; 6\frac{1}{2} \right\}$$

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

a) $6x+14y+8=0$ und $8y=x-9$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned}6x+14y+8=0 & \quad | -8 \\6x+14y &= -8 & \quad | -6x \\14y &= -6x-8 & \quad | :14 \\y &= -\frac{3}{7}x - \frac{4}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8y &= x-9 & \quad | :8 \\y &= \frac{1}{8}x - 1\frac{1}{8}\end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned}-\frac{3}{7}x - \frac{4}{7} &= \frac{1}{8}x - 1\frac{1}{8} & \quad | \bullet 5 \\-24x - 32 &= 7x - 63 & \quad | +32 \\-24x &= 7x - 31 & \quad | -7x \\-31x &= -31 & \quad | :(-31) \\x &= 1\end{aligned}$$

3. Einsetzen von x in I

$$-\frac{3}{7} \bullet 1 - \frac{4}{7} = -\frac{3}{7} - \frac{4}{7} = -1$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \{1; -1\}$$

1) Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

a) $3x+7y=26$ und $3x-4y=4$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned}3x+7y=26 & \quad | -3x \\7y=-3x+26 & \quad | :7 \\y=-\frac{3}{7}x+3\frac{5}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x-4y=4 & \quad | -3x \\-4y=-3x+4 & \quad | :(-4) \\y=\frac{3}{4}x-1\end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned}-\frac{3}{7}x+3\frac{5}{7} &= \frac{3}{4}x-1 & \quad | \bullet 28 \\-12x+104 &= 21x-28 & \quad | -104 \\-12x &= 21x-132 & \quad | -21x \\-33x &= -132 & \quad | :(-33) \\x &= 4\end{aligned}$$

3. Einsetzen von x in II

$$\frac{3}{4} \bullet 4 - 1 = 3 - 1 = 2$$

4. Angabe der Lösungsmenge

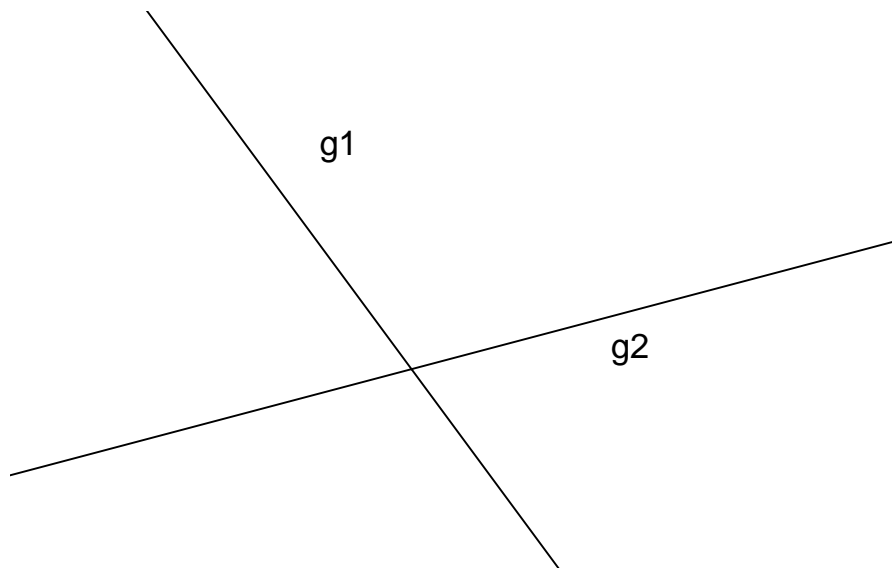
$$L = \{4; 2\}$$

Fallunterscheidung mit Beispielen

Die 3 Fallunterscheidungen gibt es auch bei dem Gleichsetzungsverfahren. Hier wollte ich euch das ganze noch mal mit Beispielen zeigen:

1. Möglichkeit:

Es gibt einen Schnittpunkt und die Gleichung hat nur eine Lösung.



Beispiel:

$$6x+14y+8=0 \text{ und } 8y=x-9$$

1. Schritt:

Rechnung:

$$\begin{aligned} 6x+14y+8=0 & \quad | -8 \\ 6x+14y &= -8 \quad | -6x \\ 14y &= -6x-8 \quad | :14 \\ y &= -\frac{3}{7}x - \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$8y=x-9 \quad | :8$$

$$y = \frac{1}{8}x - 1\frac{1}{8}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$-\frac{3}{7}x - \frac{4}{7} = \frac{1}{8}x - 1\frac{1}{8} \quad | \cdot 56$$

$$-24x - 32 = 7x - 63 \quad | +32$$

$$-24x = 7x - 31 \quad | -7x$$

$$-31x = -31 \quad | :(-31)$$

$$x = 1$$

3. Einsetzen von x in I

$$-\frac{3}{7} \cdot 1 - \frac{4}{7} = -\frac{3}{7} - \frac{4}{7} = -1$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L = \{1; -1\}$$

2. Möglichkeit:

Es gibt keine Lösung, die Graphen laufen parallel.

g1

g2

Die Lösungsmenge ist dann $L=\{\}$.

Beispiel:

$$6y=9x-81 \text{ und } 6x-4y=12$$

1. Schritt:Rechnung:

$$\begin{aligned} 6y &= 9x - 81 & | :6 \\ y &= 1 \frac{1}{2}x - 13 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x - 4y &= 12 & | -6x \\ -4y &= -6x + 12 & | :(-4) \\ y &= 1 \frac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned} 1 \frac{1}{2}x - 13 \frac{1}{2} &= 1 \frac{1}{2}x - 3 & | +13 \frac{1}{2} \\ 1 \frac{1}{2}x &= 1 \frac{1}{2}x + 10 \frac{1}{2} & | -1 \frac{1}{2}x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Angabe der Lösungsmenge

$$L=\{\}$$

Wenn die Funktionsgleichungen das gleiche m, aber ein unterschiedliches b haben, verlaufen die Graphen parallel.

3. Möglichkeit:

Es gibt viele Lösungen, wenn überall ein Schnittpunkt ist. D.h. die Graphen und ihre Funktionsgleichungen sind identisch. Und die Graphen „liegen aufeinander“.

Die Lösungsmenge ist dann $L = \{(x; y) | y = 8x + 3; x \in \mathbb{Q}\}$

Beispiel:

$$2x + \frac{3}{2}y = 4 \text{ und } 10x + 7,5y = 20$$

1. Schritt:Rechnung:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{3}{2}y &= 4 & | -2x \\ \frac{3}{2}y &= -2x + 4 & | : \frac{3}{2} \\ y &= -1\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x + 7,5y &= 20 & | -10x \\ 7,5y &= -10x + 20 & | : 7,5 \\ y &= -1\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{aligned} -1\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} &= -1\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} & | +1\frac{1}{3}x \\ \frac{8}{3} &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$L = \{(x; y) | y = -1\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}\}$$

Beispiele zum Thema: Gleichsetzungsverfahren:

a)

1. Schritt:

Rechnung:

$$1,5x+2y=9 \text{ und } 4,5x+6y=30$$

$$\begin{array}{l} 1,5x+2y=9 \quad |-1,5x \\ 2y=-1,5x+9 \quad |:2 \\ y=-\frac{3}{4}x+4,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4,5x+6y=30 \quad |-4,5x \\ 6y=-4,5x+30 \quad |:6 \\ y=-\frac{3}{4}x+5 \end{array}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{array}{l} -\frac{3}{4}x+4,5=-\frac{3}{4}x+5 \quad |+\frac{3}{4}x \\ 4,5=5 \end{array}$$

3. Angabe der Lösungsmenge

$$L=\{\}$$

b)

$$3x+4y=8 \text{ und } 7,5x+10y=20$$

1. Schritt:Rechnung:

$$\begin{array}{l} 3x+4y=8 \quad | -3x \\ 4y=-3x+8 \quad | :4 \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7,5x+10y=20 \quad | -7,5x \\ 10y=-7,5x+20 \quad | :10 \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{array}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\begin{array}{l} -\frac{3}{4}x+2=-\frac{3}{4}x+2 \quad | +\frac{3}{4}x \\ 2=2 \end{array}$$

3. Angabe der Lösungsmenge

$$L=\{(x; y)|y=-\frac{3}{4}x+2; x \in \mathbb{Q}\}$$