Funktionsuntersuchungen

1.1. Vorzeichenwechsel von f’ als hinreichendes Kriterium für relative Extremstellen

1. Funktion gegeben

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$$

2. 1. Ableitung bestimmen

$$f'(x)=x^3-4x$$

3. Notwendige Bedingung f’(x)=0.

$$0=x^3-4x$$
$$0=x(x^2-4)$$
$$x^2=4$$
$$x=2\vee x=-2$$

4. Gebietseinteilung

x<-2 : Graph verläuft im negativen Bereich
x>-2: Graph verläuft im positiven Bereich

x<2: Graph verläuft im negativen Bereich
x>2: Graph verläuft im positiven Bereich

5. Hinreichende Bedingungen:

f’(x)=0 und Vorzeichenwechsel für f’ an der Stelle x_e .

$$x\in U(0)$$
$$f'(x)>0; x<0: f\uparrow$$
$$f'(x)<0; x>0: f\downarrow$$
$$f(x)<f(0); x<0$$
$$f(x)<f(0); x>0$$
$$\Rightarrow \textit{Hochpunkt}$$

1. Funktion gegeben

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$$

2. 1. Ableitung bestimmen

$$f'(x) = -x^2 + 1$$

3. Notwendige Bedingung f'(x)=0.

$$0 = -x^2 + 1$$
$$-1 = -x^2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \vee x = -1$$

4. Gebietseinteilung

x<-1 : Graph verläuft im negativen Bereich
x>-1: Graph verläuft im positiven Bereich

x<1: Graph verläuft im negativen Bereich
x>1: Graph verläuft im positiven Bereich

5. Hinreichende Bedingungen:

f'(x)=0 und Vorzeichenwechsel für f' an der Stelle x_e .

$$x \in U(0)$$
$$f'(x) > 0; x < 1: f \uparrow$$
$$f'(x) < 0; x > 1: f \downarrow$$
$$\Rightarrow \textit{Hochpunkt}$$

Aufgaben zu „Vorzeichenwechsel von f’ als hinreichendes Kriterium für relative Extremstellen“

1) Bestimme die relativen Extremstellen.

$$b)\, f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x$$

$$b2)\, f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$$

$$c)\, f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x$$

Lösungen:

1)

$$b)\, f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \sqrt{-4}$$

In der Menge der rationalen Zahlen ist eine negative Wurzel nicht definiert.

$$b)\, f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$P(2; -2\frac{2}{3}); P(-2; 2\frac{2}{3})$$

$c)\ f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x$

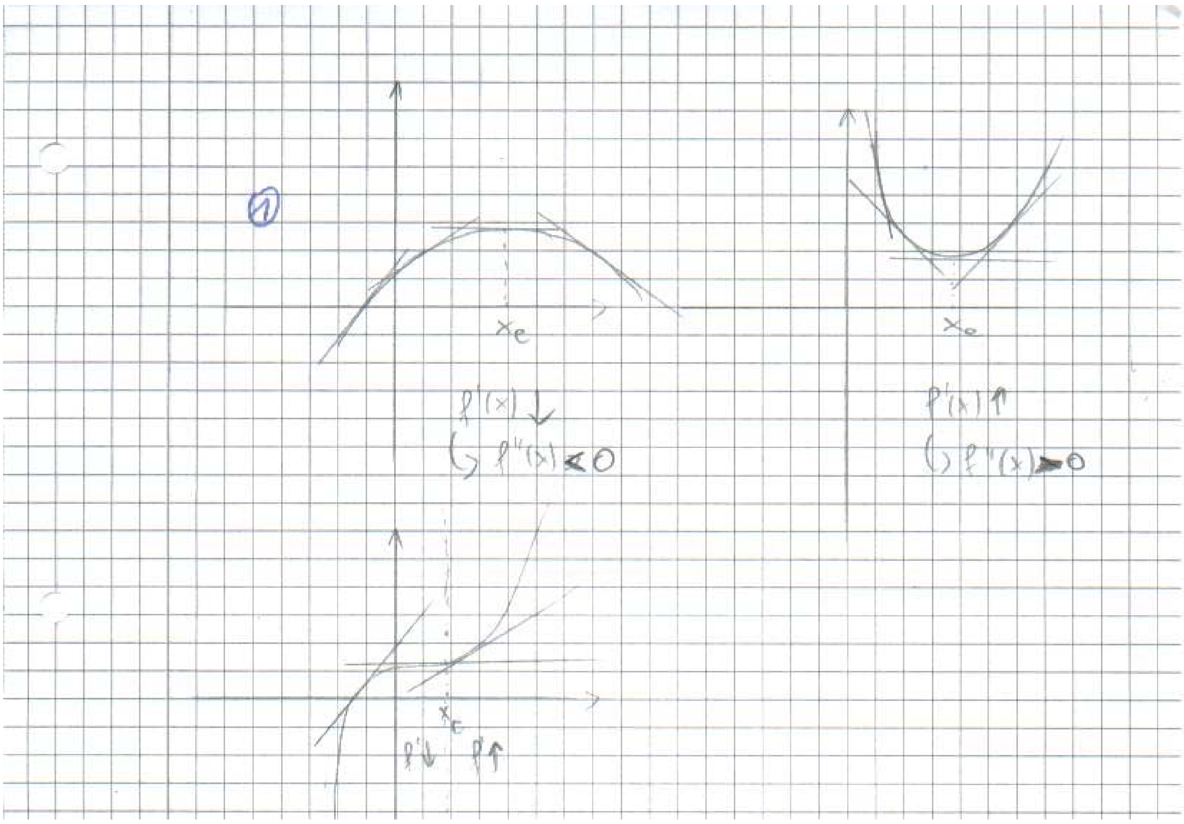
$f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}$

$0 = 4x^3 - \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$

$P(\frac{1}{2}; -\frac{3}{16})$

<u>1.2 Hinreichende Kriterien für Extremstellen mit der 2. Ableitung</u>



1. Ein Maximum liegt vor, wenn die 1. Ableitung monoton fällt.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f''/(x) = 3x^2 - 4$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Maximum$

$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow Minimum$

Aufgaben zu „Hinreichende Kriterien für Extremstellen mit der 2. Ableitung“

1) Bestimme alle relativen Extremstellen und gib die Art davon an.

$$a)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$$

Lösungen:

$$a)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+x;\ f'(x)=0; x=0 \vee x=-2$$

$$f''(x)=x+1$$

Funktionsuntersuchungen

Aufgaben zu „Vorzeichenwechsel von f’ als hinreichendes Kriterium für relative Extremstellen“

1) Bestimme die relativen Extremstellen.

$$b)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+2x$$

$$b2)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x$$

$$c)\ f(x)=x^4-\frac{1}{2}x$$

Lösungen:

1)

$$b)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+2x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+2$$

$$x^2=-4$$

$$x=\sqrt{-4}$$

In der Menge der rationalen Zahlen ist eine negative Wurzel nicht definiert.

$b)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

$x^2=4$

$x=2 \vee x=-2$

$P(2;-2\frac{2}{3});P(-2;2\frac{2}{3})$

$c)\ f(x)=x^4-\frac{1}{2}x$

$f'(x)=4x^3-\frac{1}{2}$

$0=4x^3-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$

$P(\frac{1}{2};-\frac{3}{16})$

Aufgaben zu „Hinreichende Kriterien für Extremstellen mit der 2. Ableitung“

1) Bestimme alle relativen Extremstellen und gib die Art davon an.

$a)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$

Lösungen:

$a)\ f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+x;\ f'(x)=0;x=0 \vee x=-2$

$f''(x)=x+1$

Aufgaben zur Notwendigen und hinreichenden Bedingung

1) Bestimme die Extrema.

$e) \, f(x) = x + \frac{1}{x}$

Lösungen:

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$not.Bedingung:$

$f'(x) = 0$

$0 = 1 - \frac{1}{x^2}$

$x = + - 1$

1) Bestimme alle Extrema.

$b)\ f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 9x$
$d)\ f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x - 2$

Lösungen:

3)

b)

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 9$$
$$not.Bedingung$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = 12x^2 - 12x + 9 \,|:12$$
$$0 = x^2 - x + \frac{3}{4}$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} + -\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

$$d)\ f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x - 2$$
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10$$
$$not.Bedingung$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = 5x^4 - 15x^2 + 10$$
$$0 = z^2 - 3z + 2;\ z = x^2$$
$$z = 1$$
$$z^2 - 3z + z = (z-1)(z-a)$$
$$z = 1;\ x = 1 \vee x = -1$$
$$z = 2;\ x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10(2x^3 - 3x) = 10x(2x^2 - 3)$$
$$f''(1) < 0 : Hochpunkt$$
$$f''(-1) > 0 : Tiefpunkt$$
$$f''(\sqrt{2}) < 0 : Tiefpunkt$$
$$f''(-\sqrt{2}) > 0 : Hochpunkt$$

Aufgaben zur Notwendigen und hinreichenden Bedingung

1) Bestimme alle Extrema.

$$g)\, f(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$h)\, f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$$

1) Bestimme alle Extrema.

$$h)\, f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

<u>Lösungen:</u>

1)

$$g)\, f(x) = 4x + \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = 4 - \frac{1}{x^2}$$
$$x = + - \frac{1}{2}$$
$$h)\, f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$$
$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 1$$
$$x = -1;\, x = -\frac{1}{4}$$

$$h)\, f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 4$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 4$$
$$x = 1$$
$$f'' = 12x^2 - 12x + 6$$
$$f''(1) = 6 > 0 : \mathit{Tiefpunkt}$$