Bestimmung von Wendestellen

Definition 1:

Der Graph einer in einem Intervall differenzierbaren Funktion f bildet im Intervall eine Linkskurve bzw. einer Rechtskurve, falls die Ableitungsfunktion f’ in I streng monoton steigt bzw. fällt.

Definition 2:

Hinreichende Kriterium für eine Linkskurve und einer Rechtskurve mittels f’’:
Die Funktion f sei differenzierbar.
Wenn f’’(x)>0, dann liegt eine Linkskurve vor.
Wenn f’’(x)<0, dann liegt eine Rechtskurve vor.

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

f’’(x)=0

Definition 3:

Ein Wendepunkt ist ein Punkt, in dem eine Linkskurve in eine Rechtskurve oder umgekehrt übergeht.

Bei einem Sattelpunkt liegt eine waagerechte Tangente vor, es muss gelten:

1. f’(x)=0 und 2. f’’(x)=0 !

Vorgehensweise bei einer Bestimmung von Wendepunkten / Sattelpunkten

Aufgabe:

Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion f. Prüfe auch, ob Sattelpunkte vorliegen.

a) $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$

<u>*Lösung:*</u>

<u>**Vorgehensweise:**</u>

1. Bestimmung von f' , f'' und f'''.

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+8;\ f'(x)=3x^2-4x-4;\ f''(x)=6x-4$$
$$f'''(x)=6$$

2. Notwendige Bedingung für Wendepunkte: f''(x)=0

$$f''(x)=0$$
$$0=6x-4\,|+4$$
$$6x=4\,|:6$$
$$x=\frac{2}{3}$$

3. Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$$f'''\neq 0$$

$$f'''\neq 0$$
$$f'''(\frac{2}{3})=6$$

Daraus folgt, dass an der Stelle $x=\frac{2}{3}$ **eine Wendestelle vorliegt.**

4. Bestimmung von Sattelpunkten: f'(x)=0

$$f'(\frac{2}{3})=3\bullet(\frac{2}{3})^2-4\bullet\frac{2}{3}-4=\frac{12}{9}-\frac{24}{9}-\frac{36}{9}=-\frac{72}{9}$$
$$-\frac{72}{9}\neq 0$$

Aufgaben zur Bestimmung von Wendestellen

1) Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion f. Prüfe auch, ob Sattelpunkte vorliegen.

$a) f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 b) f(x) = 2x + 1 c) f(x) = x^5 - 3x^3 - 2x d) f(x) = x^4 + 3x$

$e) f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x f) f(x) = x^2 + 3x - 4 g) f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 7$

$h) f(x) = x^6 + x^4 + 2x + 1$

Lösung:

4)

Vorgehensweise:

1. Bestimmung von f’ , f’’ und f’’’.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8; f'(x) = 3x^2 - 4x - 4; f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

2. Notwendige Bedingung für Wendepunkte: f’’(x)=0

$f''(x) = 0$

$0 = 6x - 4 \,|\, +4$

$6x = 4 \,|\, :6$

$x = \frac{2}{3}$

3. Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f''' \neq 0$

$f''' \neq 0$

$f'''(\frac{2}{3}) = 6$

Daraus folgt, dass an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ eine Wendestelle vorliegt.

4. Bestimmung von Sattelpunkten: f’(x)=0

$f'(\frac{2}{3}) = 3 \bullet (\frac{2}{3})^2 - 4 \bullet \frac{2}{3} - 4 = \frac{12}{9} - \frac{24}{9} - \frac{36}{9} = -\frac{72}{9}$

$-\frac{72}{9} \neq 0$

b)

$f(x) = 2x + 1;\ f'(x) = 2;\ f''(x) = 0;\ f'''(x) = 0$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$
0=0
Der Graph ist eine Gerade. Da keine Linkskurve bzw. Rechtskurve vorliegt, kann es keinen Wendepunkt geben.

c)

$f(x) = x^5 - 3x^3 - 2x;\ f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 2;\ f''(x) = 20x^3 - 18x;\ f'''(x) = 60x^2 - 18$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$

$0 = 20x^3 - 18x$
$0 = x(20x^2 - 18)$
$x1 = 0 \vee 0 = 20x^2 - 18$
$0 = 20x^2 - 18 \,|+18$
$18 = 20x^2 \,|:20$
$x^2 = 0,9$
$x2 = \sqrt{0,9};\ x3 = -\sqrt{0,9}$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f'''(x) \neq 0$

$f'''(0) = -18$
$f'''(\sqrt{0,9}) = 36$
$f'''(-\sqrt{0,9}) = 36$

Alle drei Stellen sind Wendestellen.

d)

$f(x)=x^4+3x;\ f'(x)=4x^3+3;\ f''(x)=12x^2;\ f'''(x)=24x$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0$

0=12x²
x=0

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f'''(x)\neq 0$

f’’’(0)=0

x=0 ist keine Wendestelle.

e)

$f(x)=x^4+3x^3+3x^2+x;\ f'(x)=4x^3+9x^2+6x+1;\ f''(x)=12x^2+18x+6;$
$f'''(x)=24x+18$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0$

$0=12x^2+18x+6\,|:12$
$0=x^2+1,5x+0,5$
$x_{1,2}=-\frac{3}{4}+-\sqrt{\frac{1}{16}}$
$x_1=-\frac{1}{2};x_2=-1$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f'''(x)\neq 0$

$f'''(-\frac{1}{2})\neq 0$
$f'''(-1)\neq 0$

Zwei Wendestellen besitzt der Graph.

Bestimmung von Sattelpunkten:

S(-1;0)
f)

$f(x) = x^2 + 3x - 4;\ f'(x) = 2x + 3;\ f''(x) = 2;\ f'''(x) = 0$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$

$0 \neq 2$

Es gibt keinen Wendepunkt.

g)

$f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 7;\ f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8;$
$f''(x) = 12x^2 + 12x + 8;\ f'''(x) = 24x + 12$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$

$0 = 12x^2 + 12x + 8 \,|:12$

$0 = x^2 + x + \frac{2}{3}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} + -\sqrt{-\frac{1}{6}}$

Es ist kein Wendepunkt vorhanden.

h)

$f(x) = x^6 + x^4 + 2x + 1;\ f'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2;\ f''(x) = 30x^4 + 12x^2;\ f'''(x) = 120x^3 + 24x$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$

$0 = 30x^4 + 12x^2$

$0 = x^2(30x^2 + 12)$

$x = 0 \vee 0 = 30x^2 + 12$

$0 = 30x^2 + 12 \mid -12$

$30x^2 = -12 \mid : 30$

$x^2 = -\frac{2}{5}$

$x = \sqrt{-\frac{2}{5}}$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f'''(x) \neq 0$

f’’’(x)=0

Es gibt keinen Wendepunkt.