Komplette Funktionsuntersuchung

Untersuche die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2$

Lösung:

Als ganzrationale Funktion hat f den Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

1. Symmetrie zur 2. Achse bzw. Ursprung f(-x)=f(x): Achsensymmetrisch zur y-Achse f(-x)=-f(x): Punktsymmetrisch zum Ursprung *Ganzrationale Funktion:* Treten nur gerade bzw. ungerade Exponenten bei den Potenzen von x aus, so liegt Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung vor.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2$ Bei den Potenzen von x treten nur gerade Exponenten auf. Der Graph von f ist also symmetrisch zur y-Achse. Punktsymmetrie liegt folglich nicht vor.
2. Verhalten von f für betragsgroße x Die Untersuchung zeigt, in welchem Quadranten der Graph von f für sehr große bzw. sehr kleine x liegt.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4(1-\frac{8}{x^2}+\frac{8}{x^4})\ für x \neq 0$ Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ geht der Klammerterm gegen 1. D.h. das Verhalten für betragsgroße x wird von $\frac{1}{4}x^4$ bestimmt. Wenn $x \to +\infty$, dann $f(x)=+\infty$ Wenn $x \to -\infty$, dann $f(x)=+\infty$
3. Gemeinsame Punkte von Graph und Koordinatensystem 1. Achse: $P_1(x; 0)$; d.h. f(x)=0 also Nullstellen von f bestimmen. 2. Achse: $P_2(0; f(0))$, also f(0) berechnen.	f(x)=0, also $\frac{1}{4}x^4-2x^2+2=0$ Wir setzen $x^2=z$ und $x^4=z^2$ und lösen die entsprechende Quadratische Gleichung. Lösungsmenge: $L=\{\sqrt{4+\sqrt{8}};-\sqrt{4+\sqrt{8}};\sqrt{4-\sqrt{8}};-\sqrt{4-\sqrt{8}}\}$ f(0)=2; Achsenschnittpunkt $P_2(0; 2)$
4. Vorzeichenbereiche / Gebietseinteilung Die Achsenschnittpunkte, Vorzeichenwechsel von f und das Verhalten für betragsgroße x ergeben eine Einteilung in Gebiete, in denen der Graph verläuft, **eine Gebietseinteilung.**	Es liegen nur einfache Nullstellen vor, also liegt stets ein Vorzeichenwechsel von f bei einer Nullstelle vor.

5. Relative Extrempunkte (a) *Notwendig:* f'(x)=0 (b) *Hinreichend für Hochpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)<0 oder - f'(x)=0 und (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x *Hinreichend für Tiefpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)>0 oder - f'(x)=0 und (-/+)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x	(a) f'(x)=0; $f'(x)=x^3-4x$, also $x^3-4x=0$; Lösungsmenge: $L=\{0;2;-2\}$ Höchstens die Stellen 0, 2, -2 sind Extremstellen der Funktion f. (b) $f''(x)\neq 0$; $f''(x)=3x^2-4$ f''(0)=-4<0; f(0)=2 H(0; 2) ist ein Hochpunkt f''(2)=8>0; f(2)=-2 T_1(2; -2) ist relativer Tiefpunkt f''(-2)=8>0; f(-2)=-2 T_2(-2; -2) ist relativer Tiefpunkt
6. Wendepunkte (a) *Notwendig:* f''(x)=0 (b) *Hinreichend für Wendepunkt.* - f''(x)=0 und $f'''(x)\neq 0$ oder - f''(x)=0 und Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x Das Zeichnen von Wendetangenten unterstützt die Zeichnung des Funktionsgraphen.	(a) f''(x)=0; $f''(x)=3x^2-4$, also $3x^2-4=0$; Lösungsmenge: $L=\{\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{4}{3}}\}$ Höchstens die Stellen $\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{4}{3}}$ sind Wendestellen der Funktion f. (b) $f'''(x)\neq 0$; f'''(x)=6x $f'''(\sqrt{\frac{4}{3}})=-\frac{2}{9}$ $W(\sqrt{\frac{4}{3}};-\frac{2}{9})$ $f'''(-\sqrt{\frac{4}{3}})=-\frac{2}{9}$ $W(-\sqrt{\frac{4}{3}};-\frac{2}{9})$
7. Wertemenge Mit Hilfe der Extremstellen und des Verhaltens für betragsgroße x lässt sich die Wertemenge W bestimmen.	T_1 und T_2 sind absolute Tiefpunkte. Es gilt $W=[-2;\infty[$.
8. Graph Die ermittelten Punkte werden eingetragen. Gegebenfalls werden weitere Funktionswerte bestimmt, um den Graphen genauer zeichnen zu können.