Übungsaufgaben

1. Bestimme alle relativen Extremstellen mit der notwendigen Bedingung und einer Gebietseinteilung

$a)\, f(x) = x^3 - 3x^2$

$b)\, f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

$c)\, f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$

2. Bestimme alle relativen Extremstellen mit der hinreichenden Bedingung.

$a)\, f(x) = 8x^3 - 2x^2$

$b)\, f(x) = x + \frac{1}{x}$

$c)\, x^4 + 4x + 3$

3. Bestimmung die Wendestellen, prüfe auch, ob ein Sattelpunkt vorliegt.

$a)\, f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$b)\, f(x) = x^4 + x^2$

$c)\, f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$

4. Führe von der Funktion eine komplette Funktionsuntersuchung durch.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

Lösungen:

1)

a)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2$ 1. Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = 3x^2 - 6x$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 3x^2 - 6x$ $0 = x(3x - 6)$ $x = 0 \vee 0 = 3x - 6; x = 2$
4. Gebietseinteilung Nun wird eine Gebietseinteilung der 1. Ableitung vorgenommen. Hier werden die Gebiete weggestrichen, in denen der Graph nicht verläuft.	$x \in U(0)$ $x < 0: f'(x) > 0: f \uparrow$ $x > 0: f'(x) < 0: f \downarrow$ $\rightarrow Hochpunkt$ $x \in U(2)$ $x < 2: f'(x) < 0: f \downarrow$ $x > 2: f'(x) > 0: f \uparrow$ $\rightarrow Tiefpunkt$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle 2 liegt ein Tiefpunkt vor. An der Stelle 0 liegt ein Hochpunkt vor.

b)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ 1. Ableitung: $f'(x) = x^3 - 4x$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = x^3 - 4x$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = x^3 - 4x$ $0 = x(x^2 - 4)$ $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$
4. Gebietseinteilung Nun wird eine Gebietseinteilung der 1. Ableitung vorgenommen. Hier werden die Gebiete weggestrichen, in denen der Graph nicht verläuft.	$x \in U(0)$ $x < 0 : f'(x) > 0 : f \uparrow$ $x > 0 : f'(x) < 0 : f \downarrow$ $\rightarrow Hochpunkt$ $x \in U(2)$ $x < 2 : f'(x) < 0 : f \downarrow$ $x > 2 : f'(x) > 0 : f \uparrow$ $\rightarrow Tiefpunkt$ $x \in U(-2)$ $x < -2 : f'(x) < 0 : f \downarrow$ $x > -2 : f'(x) > 0 : f \uparrow$ $\rightarrow Tiefpunkt$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle 2 liegt ein Tiefpunkt vor. An der Stelle 0 liegt ein Hochpunkt vor. An der Stelle –2 liegt ein Tiefpunkt vor.

c)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$ 1. Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$-2 = -\frac{1}{2}x^2 \mid \bullet 2$ $x^2 = 4$ $x = 2 \vee x = -2$
4. Gebietseinteilung Nun wird eine Gebietseinteilung der 1. Ableitung vorgenommen. Hier werden die Gebiete weggestrichen, in denen der Graph nicht verläuft.	$x \in U(2)$ $x < 2: f'(x) > 0: f \uparrow\downarrow$ $x > 2: f'(x) < 0: f \downarrow$ $\rightarrow Hochpunkt$ $x \in U(-2)$ $x < -2: f'(x) < 0: f \downarrow$ $x > -2: f'(x) > 0: f \uparrow$ $\rightarrow Tiefpunkt$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle -2 liegt ein Tiefpunkt vor. An der Stelle 2 liegt ein Hochpunkt vor.

2)

a)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n ; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $f(x) = 8x^3 - 2x^2$ 1. Ableitung: $f'(x) = 24x^2 - 4x$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = 24x^2 - 4x$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 24x^2 - 4x$ $0 = 4x(6x - 1)$ $x = 0 \vee x = \frac{1}{6}$
4. Hinreichende Bedingung Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen ist: f''(x)>0: Tiefpunkt f''(x)<0: Hochpunkt Zuerst muss also die 2. Ableitung bestimmt werden.	$f''(x) = 48x - 4$ $f''(0) = -4 < 0 : Hochpunkt$ $f''(\frac{1}{6}) = 4 > 0 : Tiefpunkt$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle $\frac{2}{3}$ liegt ein Tiefpunkt vor. An der Stelle 0 liegt ein Hochpunkt vor.

b)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 1. Ableitung: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = 1 - \frac{1}{x^2}$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 1 - \frac{1}{x^2}$ $x^2 = 1$ $x = 1 \vee x = -1$
4. Hinreichende Bedingung Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen ist: f''(x)>0: Tiefpunkt f''(x)<0: Hochpunkt Zuerst muss also die 2. Ableitung bestimmt werden.	$f''(x) = -2 \bullet \frac{1}{x^3}$ $f''(1) = -2 < 0 : Hochpunkt$ $f''(-1) = 2 > 0 : Tiefpunkt$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle -1 liegt ein Tiefpunkt vor. An der Stelle 1 liegt ein Hochpunkt vor.

c)

1. Bestimmung der 1. Ableitung von f Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	Funktion: $x^4 + 4x + 3$ 1. Ableitung: $f'(x) = 4x^3 + 4$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen wird angewendet: **f'(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f'(x)=0 $0 = 4x^3 + 4$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 1. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 4x^3 + 4 \mid -4$ $-4 = 4x^3 \mid : 4$ $x^3 = -1$ $x = -1$
4. Hinreichende Bedingung Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein für relative Extremstellen ist: f''(x)>0: Tiefpunkt f''(x)<0: Hochpunkt Zuerst muss also die 2. Ableitung bestimmt werden.	$f''(x) = 12x^2$ $f''(-1) = 12 > 0 : \textit{Tiefpunkt}$
5. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Tiefpunkt und an welcher Stelle ein Hochpunkt vorliegen.	An der Stelle -1 liegt ein Tiefpunkt vor.

3)

a)

1. Bestimmung der 1. , 2. und 3. Ableitung von f Die 1., 2. und 3.Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	$Funktion: f(x) = 4x^3 + 12x^2$ $1.Ableitung: f'(x) = 12x^2 + 24x$ $2.Ableitung: f''(x) = 24x + 24$ $3.Ableitung: f'''(x) = 24$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen wird angewendet: **f''(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f''(x)=0 $0 = 24x + 24$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 2. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 24x + 24$ $x = -1$
4. Hinreichende Bedingung Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen ist: $f'''(x) \neq 0$	$f'''(x) \neq 0$ $f'''(-1) = 24$
5. Bestimmung von Sattelpunkte Für das Vorhandensein eines Sattelpunktes muss zusätzlich noch gelten, dann f'(x)=0 ist. Dies wird mit der Hilfe der 1. Ableitung überprüft.	$f'(x) = 0$ $f'(x) = f'(x) = 12x^2 + 24x$ $f'(-1) = 12 - 24 = -12$ $-12 \neq 0$
6. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Wendepunkt vorliegt.	An der Stelle -1 liegt eine Wendestelle vor.

b)

1. Bestimmung der 1. , 2. und 3. Ableitung von f	$Funktion: f(x) = x^4 + x^2$ $1.Ableitung: f'(x) = 4x^3 + 2x$ $2.Ableitung: f''(x) = 12x^2 + 2$ $3.Ableitung: f'''(x) = 24x$
Die 1., 2. und 3.Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	
2. Notwendige Bedingung	*Notwendige Bedingung:* f''(x)=0 $0 = 12x^2 + 2$
Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen wird angewendet: **f''(x)=0**	
3. Berechnung der x-Werte	$0 = 12x^2 + 2$ $x = \sqrt{-\frac{1}{6}}$ Negative Wurzeln sind in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert!
Die Nullstellen der 2. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	
4. Hinreichende Bedingung	-----------------
Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen ist: $f'''(x) \neq 0$	
5. Bestimmung von Sattelpunkte	------------------
Für das Vorhandensein eines Sattelpunktes muss zusätzlich noch gelten, dann f'(x)=0 ist. Dies wird mit der Hilfe der 1. Ableitung überprüft.	
6. Antwortsatz schreiben	Es gibt keine Wendestelle und keinen Sattelpunkt.
Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Wendepunkt vorliegt.	

c)

1. Bestimmung der 1. , 2. und 3. Ableitung von f Die 1., 2. und 3.Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n ; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	$Funktion: f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$ $1.Ableitung: f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ $2.Ableitung: f''(x) = 3x - 6$ $3.Ableitung: f'''(x) = 3$
2. Notwendige Bedingung Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen wird angewendet: **f''(x)=0**	*Notwendige Bedingung:* f''(x)=0 $0 = 3x - 6$
3. Berechnung der x-Werte Die Nullstellen der 2. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$0 = 3x - 6 \mid +6$ $3x = 6 \mid :3$ $x = 2$
4. Hinreichende Bedingung Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen ist: $f'''(x) \neq 0$	$f'''(x) \neq 0$ $f'''(2) = 3$ $3 \neq 0$
5. Bestimmung von Sattelpunkte Für das Vorhandensein eines Sattelpunktes muss zusätzlich noch gelten, dann f'(x)=0 ist. Dies wird mit der Hilfe der 1. Ableitung überprüft.	$f'(x) = 0$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ $f'(2) = 6 - 12 + 5 = -1$
6. Antwortsatz schreiben Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Wendepunkt vorliegt.	An der Stelle 2 liegt eine Wendestelle vor.

4)

a)

Als ganzrationale Funktion hat f den Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

1. Symmetrie zur 2. Achse bzw. Ursprung f(-x)=f(x): Achsensymmetrisch zur y-Achse f(-x)=-f(x): Punktsymmetrisch zum Ursprung *Ganzrationale Funktion:* Treten nur gerade bzw. ungerade Exponenten bei den Potenzen von x aus, so liegt Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung vor.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2$ Bei den Potenzen von x treten nur gerade Exponenten auf. Der Graph von f ist also symmetrisch zur y-Achse. Punktsymmetrie liegt folglich nicht vor.
2. Verhalten von f für betragsgroße x Die Untersuchung zeigt, in welchem Quadranten der Graph von f für sehr große bzw. sehr kleine x liegt.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4(1-\frac{8}{x^2}+\frac{8}{x^4})\, für x\neq 0$ Für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ geht der Klammerterm gegen 1. D.h. das Verhalten für betragsgroße x wird von $\frac{1}{4}x^4$ bestimmt. Wenn $x\to+\infty$, dann $f(x)=+\infty$ Wenn $x\to-\infty$, dann $f(x)=+\infty$
3. Gemeinsame Punkte von Graph und Koordinatensystem 1. Achse: $P_1(x; 0)$; d.h. f(x)=0 also Nullstellen von f bestimmen. 2. Achse: $P_2(0; f(0))$, also f(0) berechnen.	f(x)=0, also $\frac{1}{4}x^4-2x^2+2=0$ Wir setzen x^2=z und x^4=z^2 und lösen die entsprechende Quadratische Gleichung. Lösungsmenge: $L=\{\sqrt{4+\sqrt{8}};-\sqrt{4+\sqrt{8}};\sqrt{4-\sqrt{8}};-\sqrt{4-\sqrt{8}}\}$ f(0)=2; Achsenschnittpunkt $P_2(0; 2)$
4. Vorzeichenbereiche / Gebietseinteilung Die Achsenschnittpunkte, Vorzeichenwechsel von f und das Verhalten für betragsgroße x ergeben eine Einteilung in Gebiete, in denen der Graph verläuft, **eine Gebietseinteilung.**	Es liegen nur einfache Nullstellen vor, also liegt stets ein Vorzeichenwechsel von f bei einer Nullstelle vor.

5. Relative Extrempunkte (a) *Notwendig:* f'(x)=0 (b) *Hinreichend für Hochpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)<0 oder - f'(x)=0 und (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x *Hinreichend für Tiefpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)>0 oder - f'(x)=0 und (-/+)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x	(a) f'(x)=0; $f'(x)=x^3-4x$, also $x^3-4x=0$; Lösungsmenge: $L=\{0;2;-2\}$ Höchstens die Stellen 0, 2, -2 sind Extremstellen der Funktion f. (b) $f''(x)\neq 0; f''(x)=3x^2-4$ f''(0)=-4<0; f(0)=2 H(0; 2) ist ein Hochpunkt f''(2)=8>0; f(2)=-2 T_1(2; -2) ist relativer Tiefpunkt f''(-2)=8>0; f(-2)=-2 T_2(-2; -2) ist relativer Tiefpunkt
6. Wendepunkte (a) *Notwendig:* f''(x)=0 (b) *Hinreichend für Wendepunkt.* - f''(x)=0 und $f'''(x)\neq 0$ oder - f''(x)=0 und Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x Das Zeichnen von Wendetangenten unterstützt die Zeichnung des Funktionsgraphen.	(a) f''(x)=0; $f''(x)=3x^2-4$, also $3x^2-4=0$; Lösungsmenge: $L=\{\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{4}{3}}\}$ Höchstens die Stellen $\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{4}{3}}$ sind Wendestellen der Funktion f. (b) $f'''(x)\neq 0$; f'''(x)=6x $f'''(\sqrt{\frac{4}{3}})=-\frac{2}{9}$ $W(\sqrt{\frac{4}{3}};-\frac{2}{9})$ $f'''(-\sqrt{\frac{4}{3}})=-\frac{2}{9}$ $W(-\sqrt{\frac{4}{3}};-\frac{2}{9})$
7. Wertemenge Mit Hilfe der Extremstellen und des Verhaltens für betragsgroße x lässt sich die Wertemenge W bestimmen.	T_1 und T_2 sind absolute Tiefpunkte. Es gilt $W=[-2;\infty[$.
8. Graph Die ermittelten Punkte werden eingetragen. Gegebenfalls werden weitere Funktionswerte bestimmt, um den Graphen genauer zeichnen zu können.