Aufgaben zu Unbekannten

1) Welche Bedingungen müssen für die Parameter a, b, c erfüllt sein, damit der Graph der angegebenen Funktion f

(1) genau zwei Wendepunkte (2) genau einen Wendepunkt (3) keinen Wendepunkt hat?

$a)\ f(x) = x^4 + ax^3 \quad b)\ f(x) = ax^4 + bx^2$

Lösungen:

<u>1. Bestimmung der Ableitungen</u>

$$f(x) = x^4 + ax^3$$
$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6ax$$
$$f'''(x) = 24x + 6a$$

<u>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen</u>

f’’(x)=0

$$0 = 12x^2 + 6ax$$
$$0 = x(12x + 6a)$$
$$x = 0 \vee 0 = 12x + 6a$$
$$0 = 12x + 6a$$
$$x = -\frac{1}{2}a$$

3. Hinreichende Bedingung für Wendestellen

$f'''(x) \neq 0$

$f'''(0) = 6a$

$f'''(-\frac{1}{2}a) - 12a + 6a = -6a$

An der Stelle $-\frac{1}{2}a$ liegt ein Wendepunkt vor.

b)

1. Bestimmung der Ableitungen

$f(x) = ax^4 + bx^2$
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
$f''(x) = 12ax^2 + 2b$
$f'''(x) = 24ax$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen

f’’(x)=0

$0 = 12ax^2 + 2b$

$x = \sqrt{-\frac{b}{6a}}$

3. Hinreichende Bedingung für Wendestellen

$f'''(x) \neq 0$

$f'''(\sqrt{-\frac{b}{6a}}) = 24a\sqrt{-\frac{b}{6a}}$

$a \neq 0$

$-\frac{b}{6a} \geq 0$

$\frac{b}{6a} \leq 0$

Vorgehensweise:

1. Bestimmung der 1., 2. und 3. Ableitung von f	$f(x) = ax^4 + bx^2$
Die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y = x^n; y' = nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2b$ $f'''(x) = 24ax$
2. Notwendige Bedingung	*Notwendige Bedingung:* f''(x)=0
Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für Wendestellen wird angewendet: **f''(x)=0**	$0 = 12ax^2 + 2b$
3. Berechnung der x-Werte	$0 = 12ax^2 + 2b$
Die Nullstellen der 2. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	$x = \sqrt{-\frac{b}{6a}}$
4. Hinreichende Bedingung	*Hinreichende Bedingung:* $f'''(x) \neq 0$
Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen wird angewendet: $f'''(x) \neq 0$	$f'''(\sqrt{-\frac{b}{6a}}) = 24a\sqrt{-\frac{b}{6a}}$ $a \neq 0$ $-\frac{b}{6a} \geq 0$ $\frac{b}{6a} \leq 0$
5. Diskriminante	$a \neq 0$
Ist die Diskriminante >0 so liegen zwei Lösungen vor. Ist die Diskriminante =0 so liegt eine Lösung vor. Ist die Diskriminante <0 so liegen keine Lösungen vor.	$-\frac{b}{6a} \geq 0$ $\frac{b}{6a} \leq 0$
6. Antwortsatz schreiben	

Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Wendepunkt vorliegt	An der Stelle $-\frac{1}{2}a$ liegt ein Wendepunkt vor.

b)

1. Bestimmung der 1., 2. und 3. Ableitung von f	$f(x)=x^4+ax^3$ $f'(x)=4x^3+3ax^2$ $f''(x)=12x^2+6ax$ $f'''(x)=24x+6a$
Die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion f wird mit Hilfe der Form $y=x^n; y'=nx^{n-1}$ bestimmt. Dabei sind die Faktorregel und die Summenregel zu beachten.	
2. Notwendige Bedingung	*Notwendige Bedingung:* f''(x)=0 $0=12x^2+6ax$
Die *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein für Wendestellen wird angewendet: **f''(x)=0**	
3. Berechnung der x-Werte	$0=12x^2+6ax$ $0=x(12x+6a)$ $x=0 \vee 0=12x+6a$ $0=12x+6a$ $x=-\frac{1}{2}a$
Die Nullstellen der 2. Ableitung wird berechnet. Entweder mit p, q-Formel, quadratischer Ergänzung etc. Dies ist für jede Aufgabe verschieden.	
4. Hinreichende Bedingung	*Hinreichende Bedingung:* $f'''(x)\neq 0$ $f'''(0)=6a$ $f'''(-\frac{1}{2}a)-12a+6a=-6a$
Die *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein von Wendestellen wird angewendet: $f'''(x)\neq 0$	
5. Antwortsatz schreiben	An der Stelle $-\frac{1}{2}a$ liegt ein Wendepunkt vor.
Zum Schluss wird der Antwortsatz formuliert. Hier muss enthalten sein, an welcher Stelle ein Wendepunkt vorliegt	

Aufgabe:
1) Gegeben sind die Funktion f_k durch $f_k(x)=x^3-3x^2+kx$.
a) Zeige, dass alle Funktionen f_k dieselbe Wendestelle haben.
b) Untersuche, wie k die Existenz und die Lage der relativen Extremstellen von f_k beeinflusst.
Lösungen:

a)

1. Bestimmung der Ableitungen:

$$f(x)=x^3-3x^2+kx$$
$$f'(x)=3x^2-6x+k$$
$$f''(x)=6x-6$$

2. Notwendige Bedingung:

f''(x)=0
$$0=6x-6$$
$$x=1$$

3. Hinreichende Bedingung:

$$f'''(x)\neq 0$$
$$f'''(x)=6x$$
$$f'''(1)=6$$

Wendestelle erfüllt, Wendepunkte nicht.
Denn W(1; -2+k)
b)

f'(x)=0
0=3x²-6x+k
0=x²-2x+k/3

$$1-\frac{k}{3}>0$$
$$1>\frac{k}{3}$$
$$3>k$$

$$1-\frac{k}{3}=0$$
$$k=3$$

$$k>3$$

Aufgabe:

13) Gegeben sind die Funktion f_k.

a) Untersuche die Funktion f_k

$a)\ f(x) = x^3 + kx$

Lösungen:

1. Wendestellen:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = x^3 + kx \\
& f'(x) = 3x^2 + k \\
& f''(x) = 6x \\
& f'''(x) = 6 \\
& Not.Bedingung: \\
& f''(x) = 0 \\
& 0 = 6x \\
& x = 0 \\
& Hinreichende.Bedingung: \\
& f'''(0) = 6
\end{aligned}
$$

2. Extrempunkte:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = x^3 + kx \\
& f'(x) = 3x^2 + k \\
& f''(x) = 6x \\
& Not.Bedingung: \\
& f'(x) = 0 \\
& 0 = 3x^2 + k \mid -k \\
& 3x^2 = -k \mid :3 \\
& x^2 = \frac{k}{3} \\
& x = \sqrt{-\frac{k}{3}} \\
& 2 Mögl.: \\
& k < 0 \\
& 1 Mögl.: \\
& k = 0 \\
& keine Mögl.: \\
& k > 0
\end{aligned}
$$

<u>Funktionsuntersuchung:</u>

Buch Seite 181 Nr. 12, Seite 180 Nr. 5 b

12) Gegeben sind die Funktion f_k durch $f_k(x)=x^3-3x^2+kx$.
a) Zeige, dass alle Funktionen f_k dieselbe Wendestelle haben.
b) Untersuche, wie k die Existenz und die Lage der relativen Extremstellen von f_k beeinflusst.

Lösungen:

a)

<u>1. Bestimmung der Ableitungen:</u>

$f(x) = x^3 - 3x^2 + kx$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + k$
$f''(x) = 6x - 6$

<u>2. Notwendige Bedingung:</u>

f''(x)=0
$0 = 6x - 6$
$x = 1$

<u>3. Hinreichende Bedingung:</u>

$f'''(x) \neq 0$
$f'''(x) = 6x$
$f'''(1) = 6$

Wendestelle erfüllt, Wendepunkte nicht.

Denn W(1; -2+k)

b)

f'(x)=0
0=3x²-6x+k
0=x²-2x+k/3

$1 - \frac{k}{3} > 0$
$1 > \frac{k}{3}$
$3 > k$

$1 - \frac{k}{3} = 0$
$k = 3$

$k > 3$

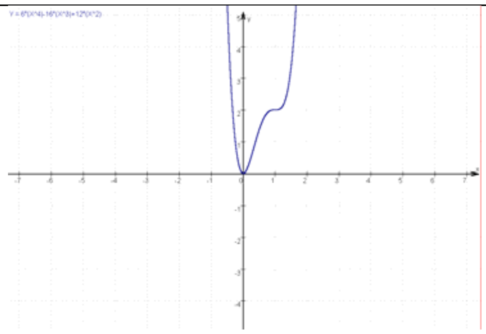
2. Komplette Funktionsuntersuchung

Untersuche die Funktion f mit $f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 12x^2$

Lösung:

Als ganzrationale Funktion hat f den Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

1. Symmetrie zur 2. Achse bzw. Ursprung f(-x)=f(x): Achsensymmetrisch zur y-Achse f(-x)=-f(x): Punktsymmetrisch zum Ursprung *Ganzrationale Funktion:* Treten nur gerade bzw. ungerade Exponenten bei den Potenzen von x aus, so liegt Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung vor.	$f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 12x^2$ Da gerade und ungerade Exponenten bei der Funktion f vorliegen, liegt weder Achsensymmetrie noch Punktsymmetrie vor.
2. Verhalten von f für betragsgroße x Die Untersuchung zeigt, in welchem Quadranten der Graph von f für sehr große bzw. sehr kleine x liegt.	$f(x) = 6x^4(1 - \frac{8}{3x} + \frac{2}{x^2})\ für x \neq 0$ Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ geht der Klammerterm gegen 1. D.h. das Verhalten für betragsgroße x wird von $6x^4$ bestimmt. Wenn $x \to +\infty$, dann $f(x) = -\infty$ Wenn $x \to -\infty$, dann $f(x) = -\infty$
3. Gemeinsame Punkte von Graph und Koordinatensystem 1. Achse: P_1(x; 0); d.h. f(x)=0 also Nullstellen von f bestimmen. 2. Achse: P_2(0; f(0)), also f(0) berechnen.	f(x)=0, also $6x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 0$ $6x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 0 = 6x^2(x^2 - \frac{8}{3}x + 2)$ $x = 0 \vee 0 = x^2 - \frac{8}{3}x + 2$ $x = \frac{4}{3} + -\sqrt{\frac{16}{9} - 2}$ $N(0;0)$ f(0)=0; S_y(0; 0)
4. Vorzeichenbereiche / Gebietseinteilung	Nullstellen bei x=0, doppelte, also verläuft der

Die Achsenschnittpunkte, Vorzeichenwechsel von f und das Verhalten für betragsgroße x ergeben eine Einteilung in Gebiete, in denen der Graph verläuft, **eine Gebietseinteilung.**	Graph nur im positiven Bereich.
5. Relative Extrempunkte (a) *Notwendig:* f'(x)=0 (b) *Hinreichend für Hochpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)<0 oder - f'(x)=0 und (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x *Hinreichend für Tiefpunkt:* - f'(x)=0 und f''(x)>0 oder - f'(x)=0 und (-/+)-Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x	(a) f'(x)=0; $f'(x)=24x^3-48x^2+24x$, also $0=x(24x^2-48x+24)$; Lösungsmenge: $L=\{0;1\}$ Höchstens die Stellen 0, 1, sind Extremstellen der Funktion f. (b) $f''(x)\neq 0$; $f''(x)=72x^2-96x+24$ f''(0)=24>0; f(0)=0 T(0; 0) ist ein Tiefpunkt f''(1)=0=0; f(1)=0 Kein Extrempunkt bei x=1
6. Wendepunkte (a) *Notwendig:* f''(x)=0 (b) *Hinreichend für Wendepunkt.* - f''(x)=0 und $f'''(x)\neq 0$ oder - f''(x)=0 und Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x Das Zeichnen von Wendetangenten unterstützt die Zeichnung des Funktionsgraphen.	(a) f''(x)=0; $f''(x)=72x^2-96x+24$, also $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$; Lösungsmenge: $L=\{1;\frac{1}{3}\}$ Höchstens die Stellen $\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{4}{3}}$ sind Wendestellen der Funktion f. (b) $f'''(x)\neq 0$; f'''(x)=6x $f'''(1)=-96$ $f'''(\frac{1}{3})\neq 0$ $W(\frac{1}{3};\frac{22}{27}); S(1;2)$
7. Wertemenge Mit Hilfe der Extremstellen und des Verhaltens für betragsgroße x lässt sich die Wertemenge W bestimmen.	T_1 und T_2 sind absolute Tiefpunkte. Es gilt $W=[0;+\infty[$.
8. Graph Die ermittelten Punkte werden eingetragen. Gegebenfalls werden weitere Funktionswerte bestimmt, um den Graphen genauer zeichnen zu können.	

Aufgaben zur Funktionsuntersuchung

1) Gegeben sind die Funktionen f durch f(x)=x³-6x²+9x+k.

a) Untersuche die Funktion mit Ausnahme der Nullstellenbestimmung ausführlich.
b) Welche Bedingung muss k erfüllen, damit die Funktion f genau eine Nullstelle, genau zwei Nullstellen, genau drei Nullstellen besitzt?
c) Ist auch der Fall möglich, dass f keine Nullstelle besitzt?

Lösungen:

1)

a)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$$
$$f(x) = x^3(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{k}{x^3})$$
$$\frac{6}{x}; \frac{9}{x^2}; \frac{k}{x^3} \to 0$$
$$x \to +\infty,\ f(x) \to +\infty$$
$$x \to -\infty,\ f(x) \to -\infty$$

Daraus folgt für die Aufgabe c), dass der Fall nicht möglich ist, denn die Funktion geht vom Unendlichen in das negative Unendlich und muss so die x-Achse schneiden, also MUSS eine mindestens Nullstelle vorliegen.

$c)\, f(x)=x^3-6x^2+9x+6$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$Not.Bedingung:$

$f'(x)=0$

$0=3x^2-12x+9$

$0=x^2-4x+3$

$0=(x-2)^2+1$

$f(1)=4+k$

$f(3)=k$

$(1;4+k)und(3;k)$

k=0: 2 Nullstellen
0<k<-4: 3 Nullstellen
k>0: 1 Nullstelle

Aufgaben zur Funktionsuntersuchung

Buch Seite 189 Nr. 1

2) Die Funktion f mit $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ sei gegeben.

a) Beweise: Der Graph von f hat genau einen Wendepunkt.

Lösungen:
2)
a)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

$Not.Bedingung:$

$f''(x)=0$

$0=6x+2a$

$x=-\frac{1}{3}a$

$Hin.Bedingung:$

$f'''(x)\neq 0$

$f'''(-\frac{1}{3}a)=-2a$

Da die 2. Ableitung eine Gerade ist, kann sie nur eine Nullstelle haben, daraus folgt, dass es genau einen Wendepunkt gibt!

$f'(1)=2-k$

$0=2-k$

$k=2$

Aufgaben zur Funktionsuntersuchung

Buch Seite 181 Nr. 13 / 1, 2, Seite 180 Nr. 5 e

13) Gegeben sind die Funktion f.

a) Untersuche allgemein die Funktionen f.
b) Welchen Wert muss der Parameter k haben, damit der Graph der Funktion f an der Stelle 1 einen Extrempunkt bzw. Wendepunkt haben kann?

(1) $f(x)=x^2-kx$ *(2)* $f(x)=x^3+kx$

5) Untersuche die Funktion f

$$e)\ f(x)=\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{4}x-1$$

Lösungen:

13)

(1)

a)

$f(x)=x^2-kx$
Die Graphen sind Normalparabeln mit dem Scheitelpunkt $S(\frac{k}{2};\frac{-k^2}{4})$.
Denn $f'(x)=2x-k$
$0=2x-6$
$$x=\frac{k}{2}\to f(\frac{k}{2})=\frac{-k^2}{4}$$
Nullstellen:

$0=x^2-kx$
$0=x(x-k)$
$x=0$ oder $x=k$
Nullstellen liegen bei $x=0$ oder bei $x=k$.
b) Wendepunkt gibt es nicht, denn es liegt eine Parabel vor.
Extrempunkte:

(2) $f(x)=x^3+kx$

1. Symmetrie:

Punktsymmetrie, denn es liegen nur ungerade Exponenten vor. $f(-x)=-f(x)$

2. Betragsgroße x:

$$f(x)=x^3+kx=x^3(1+\frac{k}{x^2})$$
$$\frac{k}{x^2}\to 0$$
$$x\to\infty,\ f(x)\to\infty$$
$$x\to-\infty,\ f(x)\to-\infty$$

3. Gemeinsame Punkte:

- $x=0$

$f(0)=0$; $S_y(0; 0)$

- $f(x)=0$

$0=x^3+kx$

$0=x(x^2+k)$

$$0=x(x^2+k)$$
$$x=0\vee 0=x^2+k$$
$$0=x^2+k\,|-k$$
$$x=\sqrt{-k}$$
$$Nullstellen:$$
$$x=0;x=\sqrt{-k};x=-\sqrt{-k}$$

4. Gebietseinteilung:

--

5. Extrempunkte:

$f'(x) = 3x^2 + k$

$Not.Bedingung:$

$f'(x) = 0$

$0 = 3x^2 + k$

$x = \sqrt{-\frac{k}{3}}$

$Hin.Bedingung:$

$f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x$

$T(\sqrt{-\frac{k}{3}}; \frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}); H(-\sqrt{-\frac{k}{3}}; -\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}})$

6. Wendepunkte:

f''(x)=0
0=6x
x=0 W(0; 0)

7. Wertemenge:

$W = \mathbb{R}$

b)

f'(1)=3+k
0=3+k
k=-3

5)

e)

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x - 1$$
$$D = \mathbb{R}$$

1. Symmetrie:

Da die Funktion nur ungerade Exponenten besitzt, liegt eine Punktsymmetrie (zu P(0; 1)) vor.

2. Verhalten für betragsgroße x:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x - 1$$
$$f(x) = \frac{1}{16}x^3(1 + \frac{4}{x^2} - \frac{16}{x^3})$$
$$\frac{4}{x^2}; \frac{16}{x^3} \to 0$$
$$x \to \infty, f(x) \to \infty$$
$$x \to -\infty, f(x) \to -\infty$$

3. Gemeinsame Punkte:

1. x=0

f(0)=-1; S_y(0; -1)

2. f(x)=0

$$0 = \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x - 1 = (\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}) \bullet (x - 2)$$

N(2; 0)

4. Gebietseinteilung:

$$x \in U(2)$$
$$x < 2: f(x) < 0$$
$$x > 2: f(x) > 0$$

5. Relative Extrempunkte:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x - 1$$
$$f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4}$$
$$Not.Bedingung:$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4}$$
$$x = \sqrt{-\frac{4}{3}}$$

Da negative Wurzeln in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist, gibt es keine Extrempunkte.

6. Wendepunkte:

$$Not.Bedingung:$$
$$f''(x) = 0$$
$$0 = \frac{3}{8}x$$
$$x = 0$$
$$Hin.Bedingung:$$
$$f'''(x) \neq 0$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}$$
$$f'''(0) = \frac{3}{8}$$
$$W(0;-1)$$

7. Wertemenge:

$$W = \mathbb{R}$$

8. Graph: