

Bestimmen von Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

1. Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = ax^4 + bx^2$. Gibt es Funktionen dieser Art, so dass der Punkt $W(1; -2,5)$ Wendepunkt ist?

Lösungen:

(1) Bildung der Ableitungen

$$f(x) = ax^4 + bx^2$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

$$f'''(x) = 24ax$$

(2) Anwendung der notwendigen Bedingungen

$$1. f(1) = -2,5 \quad f(1) = a + b$$

$$2. f'(1) = 0 \quad f''(1) = 12a + 2b$$

(3) Lösen des Gleichungssystems

$$a + b = -2,5$$

$$12a + 2b = 0$$

$$a = 0,5$$

$$b = -3$$

(4) Aufstellen der Lösung

$$f(x) = 0,5x^4 + 3x^2$$

2. Gesucht ist die Funktion einer Parabel mit $O(0; 0)$; $P(2; 3)$ und die Steigung im Punkt P der Tangente ist 2.

Lösungen:

(1) Bildung der Ableitungen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

$$f'''(x) = 0$$

(2) Anwendung der notwendigen Bedingungen

$$1. f(0)=0 \quad f(0)=c \rightarrow c=0$$

$$2. f(2)=3 \quad 3=4a+2b+c$$

$$3. f'(2)=2 \quad 2=4a+b$$

(3) Lösen des Gleichungssystems

$$0 = \quad \quad c$$

$$3 = 4a + 2b + c$$

$$2 = 4a + b$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = 1$$

$$c = 0$$

(4) Aufstellen der Lösung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$$

Bestimmen von Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

1. Bestimme die Funktion einer dritten Parabel mit $O(0; 0)$, $W(2; 4)$ und die Steigung der Wendetangenten ist $m=-3$.

Lösungen:

(1) Bildung der Ableitungen

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a$$

(2) Anwendung der notwendigen Bedingungen

1. $f(0)=0$ $d=0$
2. $f(2)=4$ $8a+4b+2c=4$
3. $f''(2)=-3$ $12a+4b+c=-3$
4. $f'(2)=0$ $12a+2b=0$

(3) Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= d \\ 4 &= 8a + 4b + 2c \\ -3 &= 12a + 4b + c \\ 0 &= 12a + 2b \end{aligned}$$

$$a = \frac{5}{4}; b = -\frac{15}{2}; c = 12; d = 0$$

(4) Aufstellen der Lösung

$$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$$