Extremalbedingungen

Einige von euch fragen sich mit Sicherheit, was unter „Extremalbedingungen“ gemeint ist oder?
Ein ganz einfaches Beispiel (Lösung des Beispiels wird später geklärt):
Ein Mann kommt ganz aufgeregt zum Glaser und sagt ihm, dass bei einer Glasscheibe eine Ecke abgebrochen sei. Und er möchte nun die größtmögliche noch verwendbare Glasscheibe durch Abschneiden erhalten. Braucht der Glaser jetzt einen Mathematik oder?

Dieses Thema ist auch für schwache Schüler geeignet, denn es sind Alltagsprobleme und man kann sich auch bei jedem Problem etwas darunter vorstellen und die Aufgaben sind nicht zu abstrakt. Also los geht es...

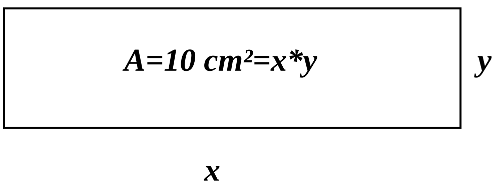
Anmerkung: Dieses Thema ist ein zusätzliches Thema zu den „Funktionsuntersuchungen“. Vor dem Bearbeiten dieses Themas sollte unbedingt „Klasse 11“ durchgearbeitet werden, da hier Fakten und Formeln als gekannt voraus gesetzt werden.

Einfache Beispiele
1. Ein Rechteck soll den Flächeninhalt 10 cm² erhalten. Wie lang sind die Rechtecksseiten zu wählen, damit das Rechteck minimalen Umfang hat?

Lösung:

1. Skizze

Ich kann auch nur empfehlen bei JEDEM Sachverhalt eine Skizze anzulegen, um sich das Problem zu verdeutlichen.



$U_{minimal}$ ist gesucht.

2. Bedingungen
2.1 Was ist bekannt?
$A = x \bullet y$ ***(Nebenbedingung)*** | ***Zuerst schreibt man auf, was man weiß und diese wird als Nebenbedingung bezeichnet.***

2.2 Was ist gesucht?
$U = 2x + 2y = 2(x + y)$ | ***Da der Umfang gesucht ist, schreibt man sich die Formel dazu auf.***

3. „Funktionsuntersuchung“

$A = x \bullet y$

$10 = x \bullet y \,|: x$ ***|Nebenbedingung nach y umformen und in die Extremalbedingung***

$y = \frac{10}{x}$

einsetzen

Einsetzen in die Extremalbedinung, so dass eine Funktion mit nur einer Variablen entsteht

$U = 2x + 2y = 2(x + y)$

$U = 2(x + \frac{10}{x})$ ***| wird als Funktion betrachtet, da man ein Extremum***

bestimmt.

Bestimmung der 1. Ableitung und berechnen der notwendigen Bedingung

Notwendige Bedingung:

U’(x)=0

$U' = 2(1 - \frac{10}{x^2})$

$0 = 1 - \frac{10}{x^2}$ ***| Vorgehensweise wie bei einer Bestimmung von Extrema!***

$x = \sqrt{10}$

Untersuchung der hinreichenden Bedingung

Hinreichende Bedingung:

U’’(x) ungleich 0

$U'' = 2 \bullet 20x^{-3} > 0$ → *Minimum liegt vor.*

4. Fehlende Größe berechnen

$y = \frac{10}{x} \rightarrow < y = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{10}}}$

Für diese beiden x und y-Werte ist der Umfang minimal.

2. Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Seitenlängen 40 cm und 25 cm soll man einen Kasten ohne Deckel herstellen, indem man an jeder Ecke ein Quadrat ausschneidet und die entstehenden Seitenflächen nach oben biegt. Der Kasten soll ein möglichst großes Volumen haben.

Lösung:

1. Angabe der gesuchten extremalen Größe

$$V = xyz$$
$$x = 40 - 2z$$
$$y = 25 - 2z$$
$$V = (40 - 2z)(25 - 2z)z = 1000z - 130z^2 + 4z^3$$

2. Herstellen von Beziehungen zwischen den Variablen anhand der Aufgabenstellung

$$A = 1000 - 130z + 4z^2$$

3. Bestimmung der 1. Ableitung und berechnen der notwendigen Bedingung

$$V' = 1000 - 260z + 12z^2$$
$$0 = 1000 - 260z + 12z^2$$
$$z1 = \frac{100}{6}; z2 = 5$$

4. Untersuchung der hinreichenden Bedingung

$$V'' = -260 + 24z$$
$$V''(5) = -140 < 0 : Minimum$$

3. Der Querschnitt eines Kanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wähle die Maße dieses Rechtecks so, dass bei gegebenem Umfang U des Querschnittes sein Inhalt möglichst groß wird.

Lösung:

1. Vorüberlegungen

$$U = x + 2y + c; A = x \bullet y + \frac{x^2}{8} \bullet \pi$$

$$A = \pi r^2; U = 2\pi r$$

$$c = \frac{x}{2}\pi$$

2. Angabe der gesuchten extremalen Größe

$$U = x + 2y + c$$

3. Herstellen von Beziehungen zwischen den Variablen anhand der Aufgabenstellung

$$U = x + 2y + c$$

$$y = \frac{U - \frac{x}{2} \bullet \pi}{x \bullet 2} = \frac{U}{2} - \frac{x}{2} \bullet \frac{\pi \bullet x}{4}$$

4. Einsetzen in die Extremalbedinung, so dass eine Funktion mit nur einer Variablen entsteht

$$A = x(\frac{U}{2} - \frac{x}{2} \bullet \frac{\pi \bullet x}{4}) + \frac{x^2}{8} \bullet \pi$$

5. Bestimmung der 1. Ableitung und berechnen der notwendigen Bedingung

$$A'(x) = (-\frac{\pi}{4} - 1)x + \frac{U}{2}$$

$$0 = (-\frac{\pi}{4} - 1)x + \frac{U}{2}$$

$$x = \frac{2U}{\pi + y}$$

6. Untersuchung der hinreichenden Bedingung

$$A''(x) = -\frac{\pi}{4} - 1$$

$$A''(\frac{2U}{\pi + y}) = -\frac{\pi}{4} - 1 < 0$$