Komplexere Aufgaben

Lasst euch nicht vom Namen des Kapitels abbringen, es durchzuarbeiten. Diese Aufgaben sind auch nicht allzu schwer. Einfach probieren. Es kommt jetzt nur hinzu, dass wir keine Zahlen mehr vorgeben, sondern allgemein Aussagen berechnen.

1) Aus einer rechteckigen Fensterscheibe mit den Seitenlängen a und b ist vom Mittelpunkt der kleineren Seite aus eine Ecke unter einem Winkel von 45° abgesprungen. Aus der restlichen Scheibe soll durch Schnitte parallel zu den ursprünglichen Seiten eine möglichst große neue Scheibe herausgeschnitten werden. Gib die Maße der neuen Scheibe an.

Lösungen:

$$y + z = a \rightarrow z = a - y$$

$$b = x(\frac{a}{2} - z)$$

$$x + \frac{a}{2} - a + y = b; y = b - x - \frac{a}{2} + a$$

$$A = x \bullet y$$

$$A = x(b - x - \frac{a}{2} + a) = bx - x^2 - \frac{a}{2}x + ax$$

$$Bestimmung A'(x)$$

$$A'(x) = b - 2x - \frac{a}{2} + a$$

$$A'(x) = 0$$

$$0 = b - 2x - \frac{a}{2} + a \,|\, + \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = b - 2x + a \,|\, -b; -a$$

$$-2x = \frac{a}{2} - a - b$$

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$$

$$Hinreichende Bedingung:$$

$$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$$

$$A = x \bullet y$$

$$A = (\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b)y$$

$$y = \frac{A}{\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b}$$

So wir haben jetzt also rausbekommen, dass es sich bei der gesuchten Fläche um ein Quadrat handelt. Aber gilt das denn für jeden Fall??

Nein, denn:

$$b-\frac{a}{2}\leq x\leq b$$

$$b-\frac{a}{2}\leq \frac{1}{2}(b+\frac{a}{2})\leq b$$

$$b-\frac{a}{2}\leq \frac{1}{2}(b+\frac{a}{2})\leq b$$

$$2b-a\leq b+\frac{a}{2}$$

$$b-a\leq \frac{a}{2}$$

$$b\leq \frac{3}{2}a$$

$$2b\leq 3a$$

$$-------$$

$$\frac{1}{2}(b+\frac{a}{2})\leq b$$

$$b+\frac{a}{2}\leq 2b$$

$$\frac{a}{2}\leq b$$

Diese Beziehungen zwischen den Seiten müssen erfüllt sein. Wenn dies der Fall ist, ist die größtmögliche Fläche ein Quadrat, sonst nicht!

2. Ein Dachboden hat als Querschnittsfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Höhe von 4,8 m und einer Breite von 8 m. In ihm soll ein möglichst großes quaderförmiges Zimmer eingerichtet werden.

Lösung:

$$A = x \bullet y (Extremalbedingung)$$

$$\frac{4,8}{4} = \frac{4,8 - y}{\frac{x}{2}} (Nebenbedingung; Strahlensätze)$$

$$\frac{4,8}{4} = \frac{4,8 - y}{\frac{x}{2}} \mid \bullet \frac{x}{2}$$

$$0,6x = 4,8 - y$$

$$y = -0,6x + 4,8$$

$$A = x \bullet y \rightarrow A = x(-0,6x + 4,8) = -0,6x^2 + 4,8x$$

$$A'(x) = 0; A'(x) = -1,2x + 4,8$$

$$0 = -1,2x + 4,8$$

$$x = 4$$

$$y = -0,6 \bullet 4 + 4,8 = 2,4$$

$$y = 2,4$$

3. In einem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen eingeschrieben werden.

<u>*Lösung:*</u>

$$V = x^2\pi y (Extremalbedingung)$$

$$\frac{y}{h} = \frac{r-x}{r} (Nebenbedingung; Strahlensätze)$$

$$\frac{y}{h} = \frac{r-x}{r} \mid \bullet h$$

$$y = \frac{h}{r}(r-x)$$

$$V = x^2\pi y \rightarrow V = x^2\pi\frac{h}{r}(r-x) = x^2\pi h - x^3\pi\frac{h}{r}$$

$$V'(x) = 0; V'(x) = 2x\pi h - 3x^2\frac{\pi h}{r}$$

$$0 = 2x\pi h - 3x^2\frac{\pi h}{r}$$

$$x = \frac{2}{3}r; x = 0$$

$$V''(x) \neq 0; V''(x) = 2\pi h - 6x\frac{\pi h}{r}$$

$$V''(0) > 0 : Minimum$$

$$V''(\frac{2}{3}r) = -2\pi h < 0 : Maximum$$

$$y = \frac{1}{3}h$$