Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger
Teil I

Von Florian Modler

In diesem Artikel möchte ich Anfängern, die sich bis jetzt noch nicht mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt haben, einen ersten Überblick über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihren Anwendungsgebieten und eine erste wichtige Zusammenfassung der ersten Ergebnisse und Erkenntnisse, die Sie aus diesem Artikel ziehen sollten, geben.

Denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist unumgänglich.
Jeder von Ihnen, will doch mit Sicherheit wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist beim Lotto („6 aus 49“) 6 Richtige zu tippen. Und da geben Sie sich doch nicht mit dem Satz zufrieden: „Die Wahrscheinlichkeit ist sehr gering“.
Also nehmen Sie sich etwas Zeit und lesen Sie diesen ersten Artikel aufmerksam.
Es werden weitere Teile der Serie „Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger“ folgen. (Geplant sind bis jetzt 3 Artikel)

1 Was ist Wahrscheinlichkeit?

Die Wahrscheinlichkeit kann man wie folgt einordnen:
Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik. Gemeinsam mit der mathematischen Statistik bildet sie das weite Feld der Stochastik, die von Beschreibung zufälliger Ereignisse und ihrer Modellierung handelt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man wie folgt definieren:
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt Modelle zur Beschreibung von Experimenten bereit, deren Ausgang zufällig ist. Zufälligkeit bedeutet hier einen unvorhersagbaren Ausgang.
Die Modelle werden mit dem Ziel erstellt, gewisse Prognosen über den Ausgang dieser Experimente zu ermöglichen, also über das Eintreten bestimmter Ereignisse und die relative Häufigkeit ihres Eintretens Vorhersage zu treffen.

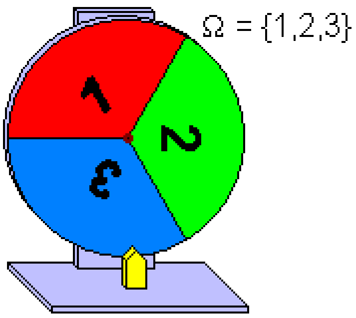
Klingt sehr paradox, nehmen wir ein einfaches Beispiel:
Für ein Wahrscheinlichkeitsexperiment soll folgender Vorgang dienen:
Aus einem Bücherregal mit deutschsprachigen Werken wird blind ein Buch gezogen (die Titel der Bücher sind bekannt, es sind 12 Bücher insgesamt). Nun wird willkürlich eine Seite des gezogenen Buches aufgeschlagen (alle Bücher haben je 600 Seiten). Wie wahrscheinlich ist es also die Seite 111 oder die Seite 113 aufzuschlagen? Besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit, Seite 111 oder Seite 113 aufzuschlagen? Oder ist es wahrscheinlicher Seite 111 aufzuschlagen?

Diesen Sachverhalt will ich im nächsten Abschnitt analysieren.

2 Laplace-Experiment

Ich möchte die Antwort auf die Frage, die im Abschnitt „1 Was ist Wahrscheinlichkeit?“ gestellt wurde, vorweg nehmen. Und zwar ist es gleich wahrscheinlich die Seite 111 oder die Seite 113 aufzuschlagen. Jede Seite hat die gleiche Wahrscheinlichkeit aufgeschlagen zu werden. Jetzt könnte man sich fragen, warum das so ist. Nun, eigentlich ganz einfach. Um Ihnen es verständlich zu machen, führe ich ein weiteres einfaches Beispiel an:

Sie sind auf einem Fest und entdecken folgendes Glücksrad:
<u>Beispiel 1:</u>

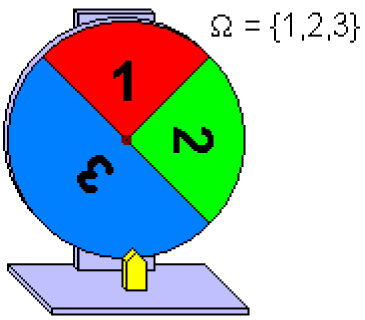


Es gibt drei verschiedene Zahlen.
Bei dem Zufallsexperiment „Drehen eines Glücksrades“ gibt es die **Ergebnismenge** $\Omega = \{1, 2, 3\}$.
Ergebnismenge ist nichts anderes, als die Menge (also die Zahlen), die Sie beim Drehen bekommen könnten, nämlich die 1, die 2 oder die 3.

Die Flächen der jeweiligen Zahlen sind gleich groß und deshalb besitzen die **Elementarereignisse (1, 2, 3)** jeweils die **gleiche Wahrscheinlichkeit** angezeigt zu werden.

Und so ist es auch bei den Bücherseiten. Da jede Seite die gleiche Fläche bzw. den gleichen Flächeninhalt besitzt, hat jede Seite die gleiche Wahrscheinlichkeit aufgeschlagen zu werden.

Stellen Sie sich ein weiteres Glückrad vor:
<u>Beispiel 2:</u>



Es gibt auch hier wieder drei verschiedene Zahlen.
Bei dem Zufallsexperiment „Drehen eines Glücksrades“ ist die **Ergebnismenge** ebenfalls $\Omega = \{1, 2, 3\}$.
Jetzt besitzt aber jede Zahl **nicht mehr die gleiche Wahrscheinlichkeit** aufgeschlagen zu werden, weil die Fläche „drei“ größer ist als die Flächen von den Zahlen 1 und 2.
Man sagt: Die Elementarereignisse sind **nicht gleich wahrscheinlich**.

Wollen wir nun auf die Überschrift des 2. Abschnittes kommen:

Ein Zufallsexperiment, bei dem die Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißt **Laplace-Experiment.**

Aber wie berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit?

Nehmen wir das 1. Beispiel:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit beim Drehen, dass der „Zeiger“ auf einer roten Fläche hält?
Sie sehen leicht, dass es nur eine rote Fläche gibt, aber es insgesamt drei verschiedene farbige Flächen sind beträgt die Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{3}$

Diesen Zusammenhang fasst man wie folgt zusammen:

Für die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisse A bei einem Laplace-Experiment gilt:
$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A "günstigen" Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

3 Die Produktregel

Es kann sein, dass das Bestimmen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem Laplace-Experiment erhebliche Mühe machen kann, deshalb haben sich die Mathematiker wieder einmal eine sehr schöne Vereinfachung ausgedacht: **Die Produktregel**.

In diesem Abschnitt werde ich Ihnen Verfahren näher bringen, mit deren Hilfe man die Anzahlen der Ergebnisse in einem Ereignis oder einer Ergebnismenge bestimmen kann, ohne die Ergebnisse alle hinschreiben zu müssen.

<u>Beispiel 1:</u>

Wir betrachten drei Urnen, aus denen nacheinander je eine Kugel gezogen wird.
Urne 1 enthält drei Kugeln mit den Bezeichnungen d, g, t;
Urne 2 enthält fünf Kugeln mit den Bezeichnungen a, e, i, o, u;
Urne 3 enthält zwei Kugeln mit den Bezeichnungen r, s.

Ein Ergebnis des Zufallsexperiments ist zum Beispiel d u r.Hierbei handelt es sich um ein dreistufiges Zufallsexperiment. Die Ergebnisse sind dreibuchstabige „Wörter“. Die Menge aller „Wörter“, die sich aus einem Anfangsbuchstaben aus Urne 1, einem zweiten aus Urne 2 und einem letzten Buchstaben aus Urne 3 bilden lassen, ist die **Ergebnismenge** des Zufallsexperiments.

$$\Omega = \{dar, das, der, des, dir, dis, dor, dos, dur, dus, gar, gas, ger, ges, gir, gis, gor, dur, gus,$$
$$tar, tas, ter, tes, tir, tis, tor, tos, tur, tus\}$$

Sie sehen schon, es ist eine erhebliche Arbeit, dieses alles aufzuschreiben.

Beim Ziehen aus n Urnen handelt es sich um ein **n-stufiges** Zufallsexperiment.

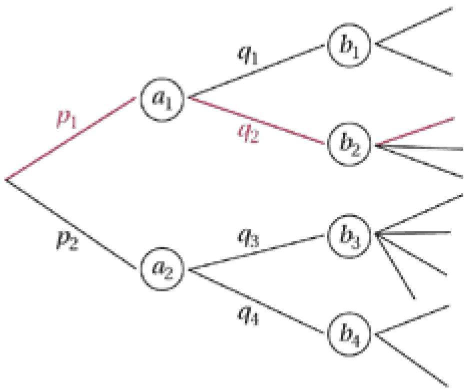
Um die Anzahl der Ergebnisse bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment zu bestimmen, kann man ein Baumdiagramm zeichnen, denn alles aufzuschreiben, ist bei einem 100stufigen Zufallsexperiment nicht zu empfehlen.

Für unser Beispiel erhalten wir einen Baum mit drei Verzweigungsstellen. Es gibt drei Möglichkeiten bei der ersten Verzweigung, je fünf bei der zweiten und je zwei bei der dritten Verzweigung.
Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt (deshalb auch Produktregel):
$3 \bullet 5 \bullet 2 = 30$

Auch hier wollen wir wieder diesen Sachverhalt allgemein zusammenfassen:

Bei einem n-stufigen Zufallsexperiment ist die Anzahl der Möglichkeiten gleich dem Produkt aus den Anzahlen der Möglichkeiten in den einzelnen Stufen (Produktregel).

Beispiel für ein Baumdiagramm:



Produktregel: Wird aus n Urnen nacheinander je eine Kugel gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten das Produkt aus den Anzahlen der Kugeln in den einzelnen Urnen.

4 Ziehen mit Zurücklegen

Am Anfang des Abschnitts folgende Frage an Sie:
Wie viele dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1-9 bilden?

Wenn Sie den Abschnitt „3. Die Produktregel“ aufmerksam gelesen haben, sollten Sie jetzt wissen, was zu tun ist.
Genau, Sie könnten ein Baum-Diagramm zeichnen. Wollen wir das hier auch tun:

Wie Sie sehen, handelt es sich auch hier wieder um ein dreistufiges Zufallesexperiment. Also kann man $9 \bullet 9 \bullet 9 = 9^3 = 729$ dreistellige Zahlen bilden.

Die drei Urnen besitzen den gleichen Inhalt. Deshalb können wir als Modell eine Urne benutzen, aus der dreimal eine Kugel gezogen werden soll. Allerdings muss jede gezogene Zahl vor dem nächsten Ziehen wieder zurückgelegt werden. Man spricht vom „Ziehen mit Zurücklegen“.

Überlegen Sie sich nun, wie das Experiment beim „Siebenmaligen Ziehen mit Zurücklegen" aussehen würde.
Wenn Sie sich das überlegt haben, überlegen Sie sich, wie es bei n Kugeln aussehen würde.

Mein Ergebnis:
Wenn die Urne n Kugeln enthält, so gibt es bei jedem Ziehen mit Zurücklegen n Möglichkeiten. Wird k mal gezogen, das heißt es lege ein k-stufiges Zufallsexperiment vor, so ist die Anzahl der Möglichkeiten nach der Produktregel definiert, nämlich:

$$n \bullet n \bullet ... \bullet n = n^k$$
$$k - Faktoren$$

> **Merksatz:** Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander k Kugeln mit Zurücklegen gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten n^k.

Ein nette und einfache Aufgabe, die mein Mathematiklehrer uns in der 11. Klasse gestellt hat: Es geht um das Spiel Fußballtoto. Nun war die Frage:
„a) Wie viele Möglichkeiten gibt es bei dem Spiel Toto?
b)Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit beim Toto mit 11 [13] Mannschaften alles richtig zu machen?"

Solche Aufgaben sollten Sie jetzt im Schlaf beherrschen können, deshalb verzichte ich auf einen langen Lösungsweg.

Lösung:

a) 3^{13}=1594323

b) $\frac{1}{3^{13}} = \frac{1}{1594323}$=6,2722547438630691522357765647 2371e-7

So zu rechnen: 1-$\frac{1}{3^{13}} = \frac{3^{13}-1}{3^{13}}$

5 Ziehen ohne Zurücklegen

Wie sieht das ganze aber aus, wenn wir die Kugeln nicht mehr in die Urne zurücklegen?
Um ihnen möglichst viel aus der Wahrscheinlichkeit zu erklären, unterteile ich diesen Abschnitt in zwei Bereiche: 1. Ziehen ohne Zurücklegen I und 2. Ziehen ohne Zurücklegen II:

5.1 Ziehen ohne Zurücklegen I

Ziehen wir aus der abgebildeten Urne neunmal eine Kugel ohne sie zurückzulegen, so erhalten wir neunstellige Zahlen, in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt. Für die erste Stelle gibt es 9 Möglichkeiten, für die zweite Stelle 8 Möglichkeiten, für die dritte 7 und so weiter...
Nach der Produktregel ist also die Anzahl der Möglichkeiten:

$$9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 362880$$

Für solch eine lange Schreibweise hat der Mathematiker eine Abkürzung. Und zwar **Fakultät**.

Dafür schreibt man nämlich kurz 9! (gelesen: 9 Fakultät)
$8! = 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$
$7! = 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$

Zusammengefasst: Bei neunmaligem Ziehen aus einer Urne mit neun Kugeln ist die Anzahl der Möglichkeiten 9!.

Auch hier kann man diesen Sachverhalt in einem Merksatz umwandeln:

Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten n!.

5.2 Ziehen ohne Zurücklegen II

In diesem Abschnitt wird es schon etwas schwieriger, sollte aber auch noch nachvollziehbar sein.

Wieder folgende Aufgabe meines Lehrers:
„Wie viele dreistellige Zahlen (ohne Widerholung von Ziffern) lassen sich aus den Ziffern 1 bis 9 bilden? . Im Urnenmodell würde die Aufgabe wie folgt lauten: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen?“

Wir müssen an das Ergebnis schrittweise herangehen:
Erste Kugel: n Möglichkeiten
Zweite Kugel: n-1 Möglichkeiten
Dritte Kugel: n-2 Möglichkeiten

k-te Kugel: n-(k-1), also n-k+1 Möglichkeiten.

Auch hier ziehen wir wieder die Produktregel heran:

$$n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1)$$

$k - Faktoren$

Zu schwer? Dann betrachten Sie doch einfach ein Beispiel: n=9 und k=6
Erste Kugel: 9 Möglichkeiten
Zweite Kugel: 9-1 Möglichkeiten
Dritte Kugel: 9-2 Möglichkeiten
Vierte Kugel: 9-4 Möglichkeiten
Fünfte Kugel: 9-5 Möglichkeiten
Sechste Kugel: 9-4 Möglichkeiten

Nach der Produktregel gilt: $\underbrace{9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4}_{6-Faktoren}$

Weiter formen wir diesen Term (von oben): $n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1)$ durch Erweitern um und erhalten:

$$n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1)$$
$$= \frac{n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1) \bullet [(n-k) \bullet (n-k-1) \bullet ... \bullet 2]}{[(n-k) \bullet (n-k-1) \bullet ... \bullet 2]}$$

Im Zähler steht jetzt n! und im Nenner (n-k)!, also gilt:

$$n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten:

$$n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Aufgabe an Sie: Spiele Sie „4 aus 12“. Das sollte mit der oben angeführten Formel und Verallgemeinerung kein Problem mehr sein.

$$\frac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9}{4!}$$

Dies kann man vereinfachen, indem man auch hier mit 8! erweitert.

$$\frac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{4! \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1} = \frac{12!}{4! \bullet 8!}$$

„7 aus 12“:

$$\frac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6}{7!} = \frac{12!}{7! \bullet 5!} = \frac{12!}{7!(12-7)!} = \binom{12}{7}$$

Also verallgemeinert man diesen Sachverhalt so:

Werden aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge k Kugeln gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Für $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ schreibt der Mathematiker: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Gelesen wird es „n über k“.

6 Lotto („6 aus 49“)

Kommen wir nun zum Lotto. „Endlich“, werden sie denken. „Darauf habe ich gewartet.“ Wie viele Möglichkeiten gibt es also beim Lotto?
Das können Sie jetzt selber berechnen! Wenden Sie einfach die oben angeführte Formel an:

$$\binom{49}{6}=\frac{49!}{(49-6)!\bullet 6!}=\frac{49!}{(43)!\bullet 6!}=13983816 \text{ Möglichkeiten}$$

Die Wahrscheinlichkeit beim Lotto die 6 Richtigen zu haben, beträgt 1:13983816.
Also sehr geringe Chance, alle 6 Richtigen zu tippen.

7 Spielchen mit Fakultät

Ich möchte Sie nur auf folgende Verallgemeinerungen aufmerksam machen, ohne darauf genau einzugehen. Solche Verallgemeinerungen können Sie im Mathematikstudium sehr gut gebrauchen:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\bullet 0!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$\binom{0}{0}=\frac{0!}{0!\bullet 0!}=1$$

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\bullet n!}=1$$

8 Zusammenfassung Teil I

1. Ein Zufallsexperiment, bei dem die Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißt **Laplace-Experiment.** Bei einem Laplace-Experiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A "günstigen" Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

---

2. Wird aus n Urnen nacheinander je eine Kugel gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten das Produkt aus den Anzahlen der Kugeln n den einzelnen Urnen.
(Produktregel)

---

3. Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander k Kugeln mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten n^k.
(Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge)

---

4. Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Spezialfall: Werden aus einer Urne mit n Kugeln nacheinander n Kugeln ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten n!.

---

5. Werden aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (mit einem Griff) gezogen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten.

$$\frac{n!}{(n-k)! \bullet k!} = \binom{n}{k}$$

Beispiel: „6 aus 49“ Lotto

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \bullet 6!} = \frac{49!}{(43)! \bullet 6!}$$

Die Wahrscheinlichkeit beim Lotto die 6 Richtigen zu haben, beträgt 1:13983816!

Ich hoffe ich habe Ihnen einen ersten kleinen, verständlichen Überblick über die Wahrscheinlichkeitsrechnung geben können. Der zweite Teil wird sich um die Bernoulli-Experimente drehen.