

# Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger

## Teil II

Von Florian Modler

Dies ist nun der zweite Teil meiner Serie „Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger“. Dieser Artikel wird etwas kürzer ausfallen als der erste, weil ich mich in diesem Artikel nur auf **Bernoulli-Experimente** und auf die **Binomialverteilung** beschränken möchte.

### 1 Wer war Bernoulli?

Jakob Bernoulli wurde am **27.12.1654** in Basel geboren und starb an **16.08.1705** ebenfalls in Basel.

Bernoulli studierte Theologie und heimlich(!) Mathematik. Nach einer ausgedehnten Studienreise las er in Basel Experimentalphysik, seit 1687 Mathematik, Seine „Ars conjectandi“ enthält die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Bernoullischen Zahlen und das Gesetz der großen Zahlen.

Sein Briefwechsel mit Leibniz enthält Gedanken der Fehlertheorie.

Als einer der ersten begriff er den Leibnizschen Calculus und baute ihn aus.

Weiterhin arbeitete er über Differentialgeometrie, über das isoperimetrische Problem und über Reihenlehre.



### 2 Bernoulli-Experimente

Im ersten Artikel meiner Serie „Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger“ haben Sie einige Zufallsexperimente kennen gelernt. Wie jede Sache in der Mathematik, haben auch einige dieser Zufallsexperimente Namen. Und zwar nennt man Zufallsexperimente mit genau zwei Ergebnissen (Zum Beispiel: Treffer und Niete) **Bernoulli-Experimente**.

Ich möchte ihr vorhandenes Wissen aus dem ersten Artikel noch einmal etwas auffrischen und einige Beispiele für Bernoulli-Experimente anführen:

1. Münzwurf: Wappen=Treffer, Zahl=Niete
2. Ziehen aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln: Weiße Kugeln=Treffer, schwarze Kugeln=Niete.
3. Man steht in einer fremden Stadt ratlos an einer Straßenecke und fragt einen zufälligen Passanten nach dem weg: er weiß den Weg=Treffer, er weiß den weg nicht=Niete.

In einem Würfelspiel haben die beiden Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\{\text{Treffer}\}) = p = \frac{1}{6}, P(\{\text{Niete}\}) = q = 1 - p = \frac{5}{6}$$

Wird das Zufallsexperiment erneut durchgeführt, so ist bei jeder Durchführung die Trefferwahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{6}$  und die Nietenwahrscheinlichkeit wiederum  $q = \frac{5}{6}$ . Man sagt, die Ergebnisse sind **unabhängig** voneinander.

Auch hier stellen wir wieder Definition aus wie in dem ersten Artikel:

Ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen (Treffer und Niete), das n-mal durchgeführt wird, wobei die einzelnen Versuchsdurchführungen unabhängig voneinander sind, heißt **n-stufiges Bernoulli-Experiment**.

### 3 Binomialverteilung

Wird nun ein Bernoulli-Experiment mehrfach, z.B. 12-mal, wiederholt und ändert sich die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“ und „Misserfolg“ nicht, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette**. Bei einer Bernoulli-Kette interessiert man sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit z.B. 7-mal „Erfolg“ beobachtet werden kann.

Sind „Erfolg“ und „Misserfolg“ gleich wahrscheinlich (Münzwurf), so gibt es für 12 Würfe insgesamt  $2^{12}$  mögliche Ergebnisse. Zum Beispiel bedeutet 7-mal Zahl: Unter den 12 Ergebnissen befindet sich genau 7-mal das Einzelergebnis „Zahl“. Dies ist auf so viele Arten möglich, wie man 7 Objekte aus 12 Objekten auswählen kann, also  $\binom{12}{7}$ -mal. Damit ist die

Wahrscheinlichkeit für 7-mal Zahl  $\frac{\binom{12}{7}}{2^{12}}$ .

Sind aber bei einem Bernoulli-Experiment die beiden Einzelergebnisse nicht gleich wahrscheinlich, so hat er dazu passende Baum ebenfalls  $\binom{12}{7}$  Wege, die „7-mal Erfolg“ führen. Stellen wir uns ein Glücksrad vor, bei dem 25% der Fläche „Erfolg“ und 75% der Fläche „Misserfolg“ annehmen, vor:

Jeder dieser Wege hat dabei die Wahrscheinlichkeit  $(\frac{1}{4})^7 \cdot (\frac{3}{4})^5$ . Die Wahrscheinlichkeit für „7-mal Erfolg“ beträgt damit insgesamt  $\binom{12}{7} \cdot (\frac{1}{4})^7 \cdot (\frac{3}{4})^5$ .

Es sei X eine Zufallsgröße, die jedem Ergebnis eines n-stufigen Bernoulli-Experiments die zugehörige Trefferzahl k zuordnet. Wenn p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in jeder Stufe des Bernoulli-Experiments ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $X=k$ .

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot p^{1-k}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer solchen Zufallsgröße heißt **Binomialverteilung**.

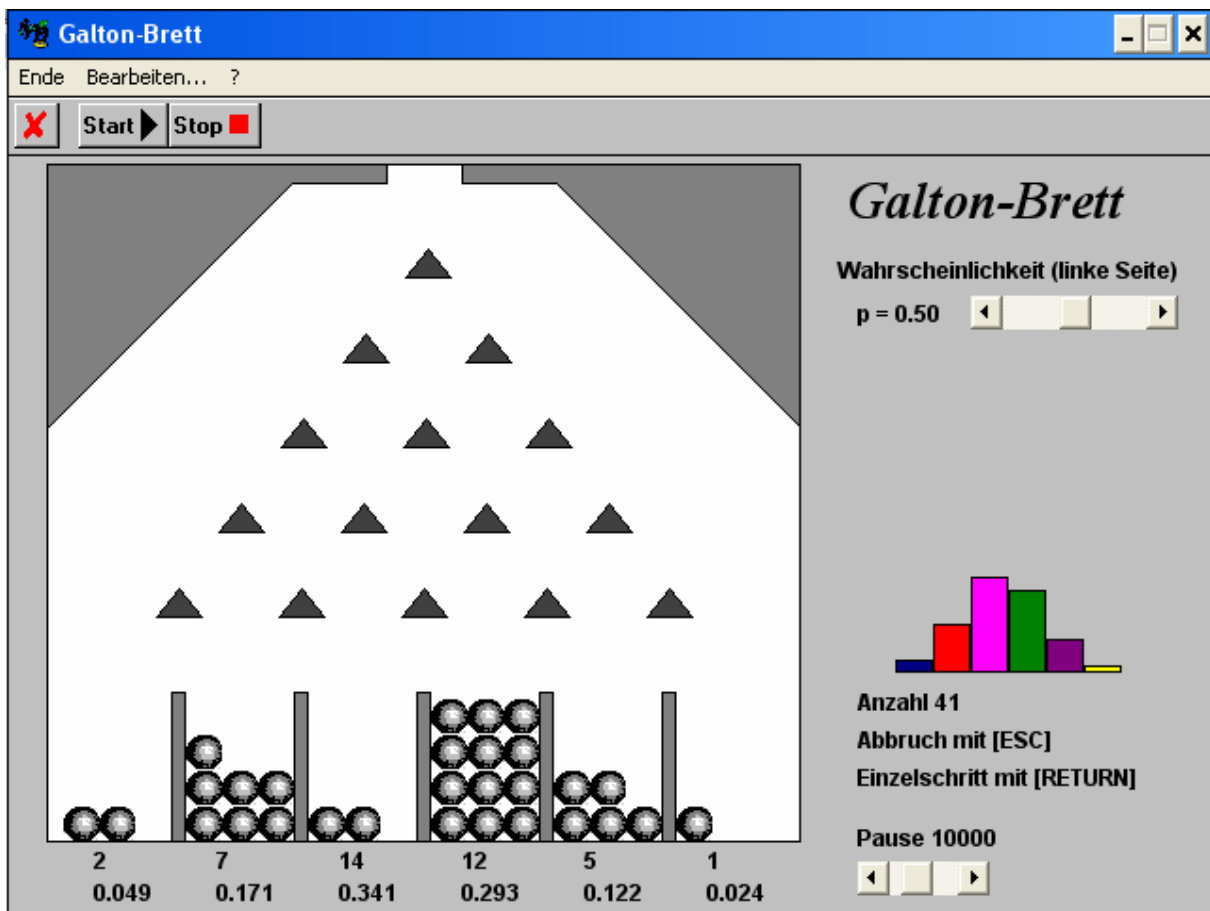
Der Term  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$  heißt **Binomialkoeffizient**.

© [klassenarbeiten.de](http://klassenarbeiten.de) [Autor: Florian Modler]

**Anwendungsgebiet:**

Ein schönes Beispiel für eine Binomialverteilung mit  $p=0,5$  liefert das **Galton-Brett**.

Auf einem Brett sind Stifte in regelmäßigen Reihen angebracht. Eine Kugel, die dieses Brett herunterrollt, trifft in jeder Reihe auf einen Stift, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder nach rechts abgelenkt und gelangt unten in einen der Auffangbehälter. Der Lauf der Kugel über das Brett ist, wenn das Brett  $n$  reihen abgelenkter Stifte enthält, ein  $n$ -stufiges Bernoulli-Experiment. Wird dieses Experiment mit vielen Kugeln durchgeführt, so sammeln sich die Kugeln in  $n+1$  Auffangbehältern und stellen die Häufigkeiten in der Art eines Staffeljedes anschaulich dar. Im Idealfall entspricht dieses Bild der Binomialverteilung für das jeweilige  $n$  und  $p=0,5$ .



## 4 Zusammenfassung Teil II

1. Ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen (Treffer und Niete), das n-mal durchgeführt wird, wobei die einzelnen Versuchsdurchführungen unabhängig voneinander sind, heißt **n-stufiges Bernoulli-Experiment**.

---

2. Es sei X eine Zufallsgröße, die jedem Ergebnis eines n-stufigen Bernoulli-Experiments die zugehörige Trefferzahl k zuordnet. Wenn p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in jeder Stufe des Bernoulli-Experiments ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $X=k$ .

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot p^{1-k}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer solchen Zufallsgröße heißt **Binomialverteilung**.

Der Term  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$  heißt **Binomialkoeffizient**.