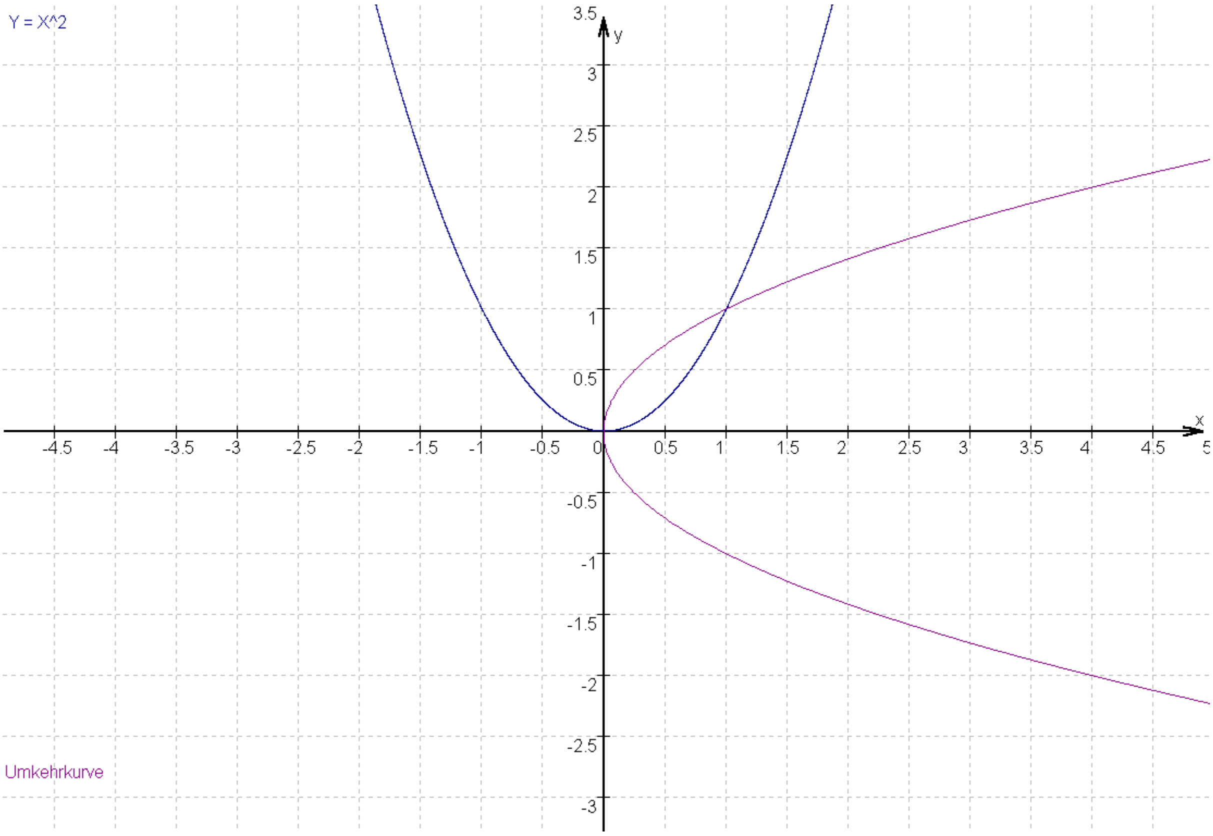
Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktionen von der Normalparabel sieht so aus:
Man spricht hier von einer Wurzelfunktion.



Im Allgemeinen sieht eine Wurzelfunktion so aus... Es gibt aber auch hier wieder einige Einschränkungen, dazu später mehr...

<u>Umkehrfunktion:</u>

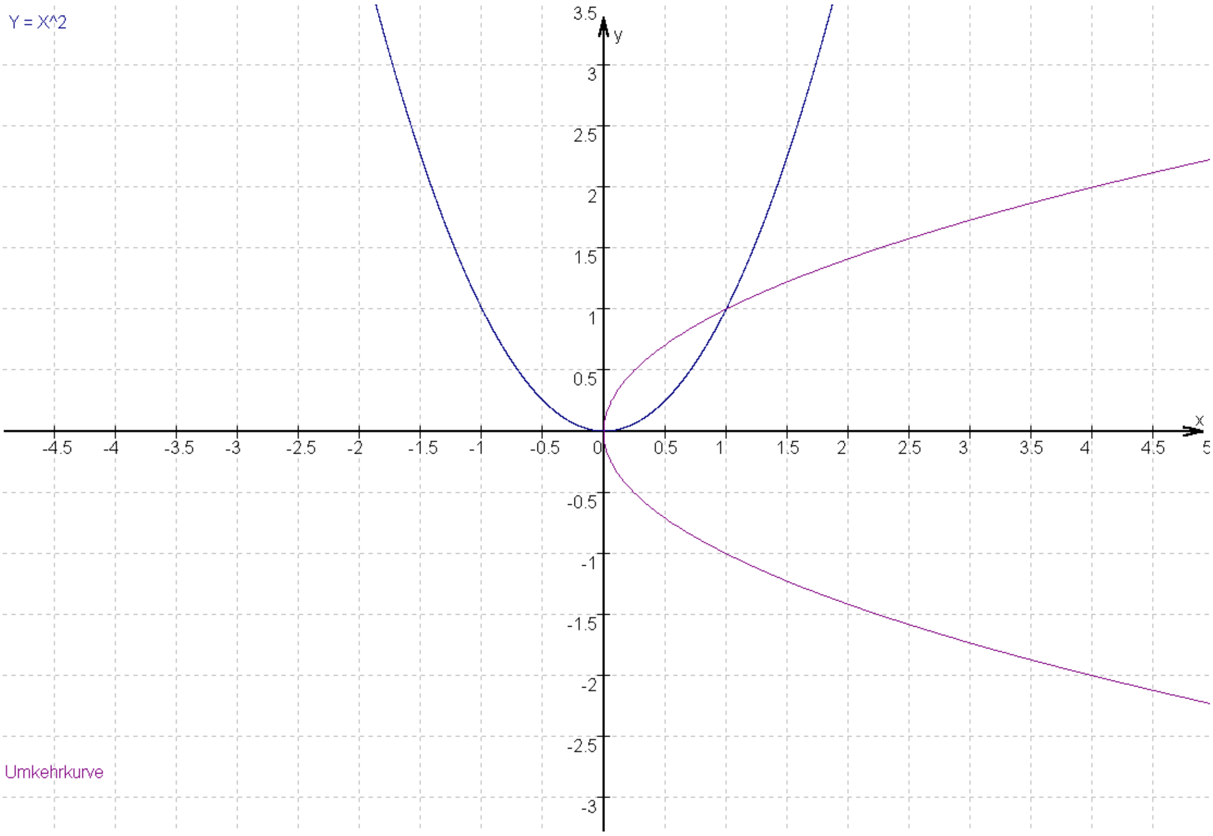
$y=x^2$ |

$\sqrt{y=x}$ Tauschen

$y=\sqrt{x}$

<u>Wertetabellen für $y=x^2$ und</u> $y=\sqrt{x}$

$y=x^2$		$y=\sqrt{x}$	
x	y	x	y
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	2	$\sqrt{2}$
3	9	3	$\sqrt{3}$
-1	1	-1	-----
-2	4	-2	-----
3	9	3	$\sqrt{3}$
4	16	4	$\sqrt{4}=2$



Die Umkehrfunktion von y=x^2 ist für x ∈ $\mathbb{R}_+$: $y=+\sqrt{x}$ oder

Für x ∈ $\mathbb{R}_-$: $y=-\sqrt{x}$.

1. Bestimme die Umkehrfunktion von $y=x^2+4x+2$

$y=x^2+4x+2$
$y=(x+2)^2-2 \quad |+2$
$y+2=(x+2)^2 \quad |$
$\sqrt{y+2}=x+2 \quad |-2$
$\sqrt{y+2}-2=x$ Tausch
$y=\sqrt{x+2}-2$

Vorgehensweise:

1. Zuerst formt man $y=x^2+4x+2$ in die Scheitelpunktsform um.

$y=x^2+4x+2$
$y=(x+2)^2-2$

2. Danach formt man die Gleichung um.

$y=(x+2)^2-2 \quad |+2$
$y+2=(x+2)^2 \quad |$
$\sqrt{y+2}=x+2 \quad |-2$

3. Nun tauscht man y und x und schon hat man die Umkehrfunktion.

$\sqrt{y+2}=x+2 \quad |-2$
$\sqrt{y+2}-2=x \quad |\text{Tauschen}$
$y=\sqrt{x+2}-2$

<u>*Aufgabe*</u>

1. Bestimme die Umkehrfunktionen und gib den Definitionsbereich an.

1. $y=5x^2$
2. $y=2x^2-1$
3. $y=x^2-2x$
4. $y=x^2+2x-1$
5. $y=5x^2-10x+4$

<u>Lösung:</u>

1.

$y=5x^2 \quad | :5$

$\frac{y}{5}=x^2 \quad |\sqrt{...}$

$\sqrt{\frac{y}{5}}=x \quad |\text{Tauschen von x und y}$

$y=\sqrt{\frac{x}{5}}$

<u>Definitionsbereich:</u>

x>0

2.

$y=2x^2-1 \quad |+1$

$y+1=2x^2 \quad | :2$

$y+\frac{1}{2}=x^2 \quad |$

$\sqrt{y+\frac{1}{2}}=x \quad |\text{Tauschen von x und y}$

$y=\sqrt{x+\frac{1}{2}}$

<u>Definitionsbereich:</u>

x>-1

3.

$y=x^2-2x$
$y=(x-1)^2-1 \quad |+1$
$y+1=(x-1)^2 \quad |$
$\sqrt{y+1}=x-1 \quad |+1$
$\sqrt{y+1}+1=x \quad$ |Tauschen von x und y
$y=\sqrt{x+1}+1$

<u>Definitionsbereich:</u>

$x>-1$

4.

$y=x^2+2x-1$
$y=(x+1)^2-2 \quad |+2$
$y+2=(x+1)^2 \quad |\sqrt{\ldots}$
$\sqrt{y+2}=x+1 \quad |-1$
$\sqrt{y+2}-1=x \quad$ |Tauschen von x und y
$y=\sqrt{x+2}-1$

<u>Definitionsbereich:</u>

$x>-2$

5.

$y=5x^2-10x+4$

$y=5(x^2-2x+\frac{4}{5})$

$y=5((x-1)^2-\frac{1}{5})$

$y=5(x-1)^2-1 \quad |+1$
$y+1=5(x-1)^2 \quad |:5$
$(y+1)/5=(x-1)^2 \quad |\sqrt{\ldots}$

$\sqrt{\frac{y+1}{5}}=x-1 \quad |+1$

$\sqrt{\frac{y+1}{5}}+1=x \quad$ |Tauschen von x und y

$y=\sqrt{\frac{x+1}{5}}+1$

Aufgaben / Lösungen:

1. Bestimme die Scheitelpunkte und die Nullstellen der Funktionen von

1. $y=5x^2$
2. $y=2x^2-1$
3. $y=x^2-2x$
4. yx^2+2x-1
5. $y=5x^2-10x+4$

Lösung:

1.

S (0 ; 0) x=0 ; y=0

2.

S (0 ; -1)

3.

S (1 ; -1)

L={ }

4.

S (-1 ; -2)

$x_1=1+\sqrt{2}=2{,}4142...$
$x_2=1-\sqrt{2}=-0{,}4142...$

5.

S (1 ; -1)

$x_1=5+\sqrt{21}=9{,}5825...$
$x_2=5-\sqrt{21}=0{,}41742...$

<u>Bestimmung der Scheitelpunkte bei der Funktion</u> $f(x)=\sqrt{-a}+b$ **:**

Der Scheitelpunkt der Funktion $f(x)=\sqrt{-a}+b$.

<u>Beispiele:</u>

Scheitelpunkt S(-1; 1,3)

$f(x)=\sqrt{-1}+1,3$

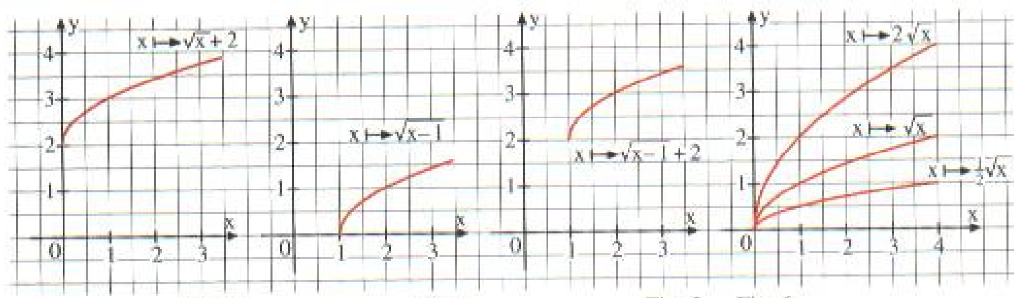
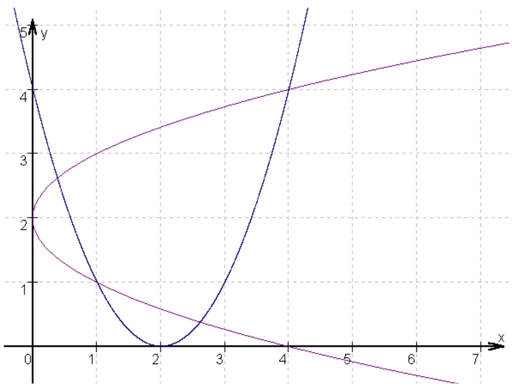
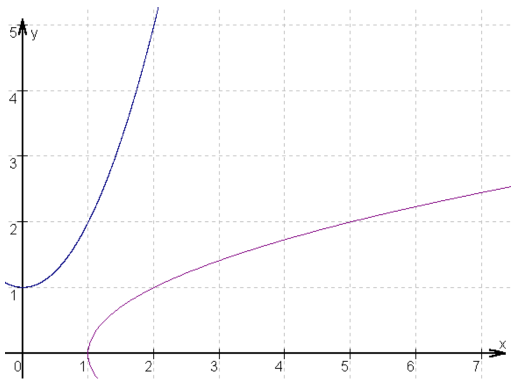
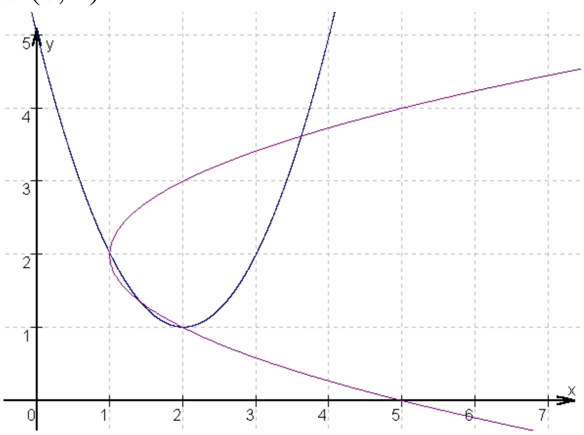


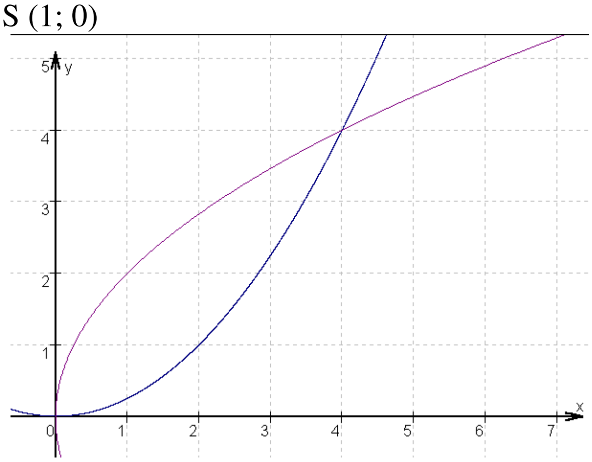
Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6





S (0; 2) S (1; 0)





S (1; 2) S (0; 0)

Immer die lila Kurve.

Umkehrfunktion:

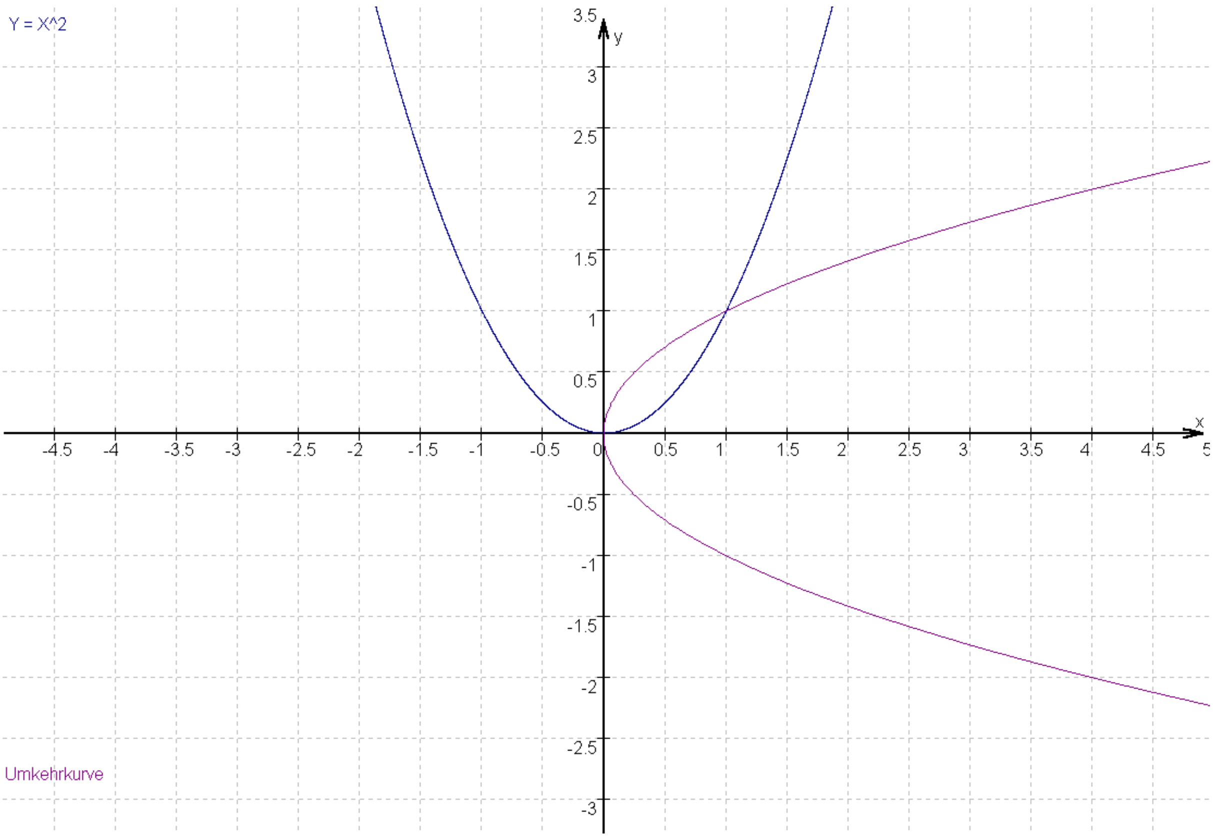
$y=x^2$ |

$\sqrt{y}=x$ Tauschen

$y=\sqrt{x}$

Wertetabellen für $y=x^2$ und $y=\sqrt{x}$

$y=x^2$		$y=\sqrt{x}$	
x	y	x	y
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	2	$\sqrt{2}$
3	9	3	$\sqrt{3}$
-1	1	-1	-----
-2	4	-2	-----
3	9	3	$\sqrt{3}$
4	16	4	$\sqrt{4}=2$



Die Umkehrfunktion von $y=x^2$ ist für $x \in \mathbb{R}_+$: $y = +\sqrt{x}$ oder

Für $x \in \mathbb{R}_-$: $y = -\sqrt{x}$.

Jetzt könnt ihr ohne Probleme Umkehrfunktionen bestimmen! J