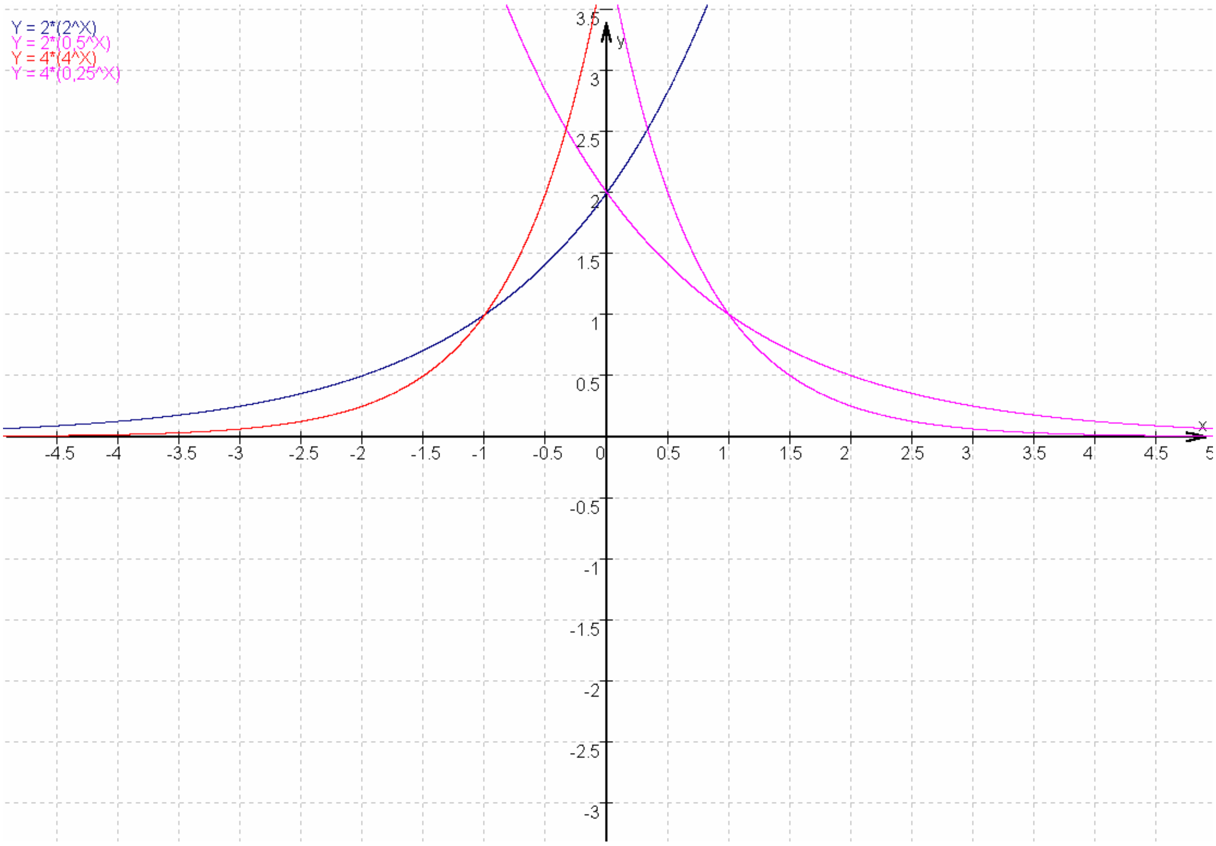
Exponentialfunktionen

1. Bestimme die Funktionen der Graphen.



a) $2 \bullet 2^x$
b) $2 \bullet (\ ½\ )^x$
c) $4 \bullet 4^x$
d) $4 \bullet (\ ¼\ )^x$

Bestimmung von Exponentialfunktion der Form $f(x)=b \bullet a^x$

1. Graphen

Wenn man einen Graphen der Form $f(x)=b \bullet a^x$ gegeben hat, und nun seine Funktionsvorschrift bestimmen will, geht man so vor:

Vorgehensweise:

1. Zuerst sucht man sich S_y (den Schnittpunkt mit der y-Achse) und einen anderen Punkt am Besten (0; __).

P1(0; 4) P2(1; 1)

2. Danach berechnet man zuerst b.

f(0)=b=4

3. Nun berechnet man a.

$$b=4$$
$$y=4 \bullet a^x$$
$$y=4 \bullet a^1$$
$$1=4 \bullet a^1 \quad | :4$$
$$a=\frac{1}{4}$$

4. Zum Schluss stellt man die Funktionsvorschrift auf.

$$f(x)=4 \bullet (\frac{1}{4})^x$$

2. Punkte

Wenn man zwei unterschiedliche Punkte gegeben hat, geht man wie folgt vor:

Vorgehensweise:

1. Einsetzung in den Funktionsterm

$\mathbf{b \bullet a^{-1}=24}$ **und** $\mathbf{b \bullet a^{1,5}=0{,}75=\frac{3}{4}}$

2. Auflösen der 1. Gleichung nach b

$\mathbf{b=24a}$

3. Einsetzen in die 2. Gleichung

$\mathbf{24a \bullet a^{1,5}=\frac{3}{4}}$
$a^{2,5}=1/32$ bzw. $a^{5/2}=1/32$

4. Potenzieren mit 2/5, um a^1 zu erhalten

$\mathbf{a=(1/32)^{2/5}=\frac{1}{4}}$

5. Berechnung von b durch Einsetzen in die 1. Funktion

$\mathbf{b \bullet (\frac{1}{4})^{-1+=24;}}$ **4b=24; b=6**

<u>Aufgaben zu Exponentialfunktionen der Form $f(x)=b \bullet a^x$</u>

1. Bestimme a und b so, dass der Graph der Exponentialfunktion $f(x)=b \bullet a^x$ durch die Punkte P und Q geht.

a) P (0,10); Q (1; 1) b) P (0, ¼); Q (1,1) c) P (0,$\sqrt{4}$); Q (1,2)

d) P (4, 2); Q (6, 15) e) P (1,10); Q (4,40) f) P (5,36); Q (16,6)

g) P (2,3); Q (6,75) h) P (3,30); Q (3,5) i) P (4,12); Q (7,10)

k) P (0,c); Q (1,y) l) P (0,b); Q (x,1) m) P (0,10); Q (c,d)

2. Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Exponentialfunktionen.

a) $f(x)=(0{,}8)^x$ b) $f(x)=0{,}8 \bullet (0{,}8)^x$ c) $f(x)= \frac{1}{2} \bullet (0{,}7)^x$ d) $f(x)=(0{,}7)^x$ e) $f(x)= \frac{1}{2} \bullet (0{,}7)^{x+1}$

Vergleiche die Graphen. Wie gehen sie auseinander hervor?

3. Schreibe die Funktion in der Form $f(x)=b \bullet a^x$. Zeichne ihren Graphen.

a) $f(x)=3^{x-1}$ b) $f(x)=4^{2x}$ c) $f(x)=3^{2x+3}$ d) $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$

e) $f(x)=(\sqrt{4})^{2x+4}$ f) $f(x)=(\sqrt{4})^{4x}$ g) $f(x)=(\sqrt{4})^{3x+4}$ h) $f(x)=(\sqrt[3]{5})^{6x-3}$

Lösungen:

1)

a)

P (0;10); Q (1; 1)

$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=10$ und $b \bullet a^1=1$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$10=b \bullet a^0$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$10=b \bullet a^0$

$10=b \bullet 1 \quad |:1$

$b=10$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^1=1$

$10 \bullet a^1=1$

$a=1/10$

Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:

$10=b \bullet 0,1^0$

$b=10$

$a=1/10$

b)

P (0, ¼); Q (1,1)

$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=0,25$ und $b \bullet a^1=1$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$0,25=b \bullet a^0$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$0,25=b \bullet a^0$

$0,25=b \bullet 1 \quad |:1$

$b=0,25$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^1=1$

$0,25 \bullet a^1=1$

$a=4$

Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:

$0,25=b \bullet 4^0$

$b=0,25$

$a=4$

c)
P $(0,\sqrt{4})$; Q $(1,2)$
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=\sqrt{4}=2$ und $b \bullet a^1=2$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$2=b \bullet a^0$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$2=b \bullet a^0$
$2=b \bullet 1 \quad |:1$
$b=2$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^1=2$
$2 \bullet a^1=2$
$a=1$

Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:

$b=2$

$a=1$

d)
P (4, 2); Q (6, 15)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^4=2$ und $b \bullet a^6=15$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$2=b \bullet a^4$

<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$2=b \bullet a^4$ $|:a^4$
$b=2/a^4$

<u>Einsetzen in die 2. Gleichung:</u>

$b \bullet a^6=15$
$2/a^4 \bullet a^1=15$
$2/a^3=15$ $|:2$
$1/a^3=7,5$ $| \bullet a^3$
$1=7,5a^3$ $|:7,5$
$a^3=1/7,5$ $|\sqrt[3]{}$
$a=\sqrt[3]{1/7,5}$

<u>Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:</u>

$b=2/(\sqrt[3]{1/7,5})^4$
$b=0,68$

e)
P (1,10); Q (4,40)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^1=10$ und $b \bullet a^4=40$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$10=b \bullet a^1$

<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$10=b \bullet a^1 \quad |:a^4$
$10= b \bullet a \quad |:a$
$b=10/a$

<u>Einsetzen in die 2. Gleichung:</u>

$b \bullet a^4=40$
$10/a \bullet a^4=40$
$10 \bullet a^3=40 \quad |:10$
$a^3=4 \quad |\sqrt[3]{}$
$a=\sqrt[3]{4}$
$a=1,58$

<u>Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:</u>

$b=10/a$
$b=10/1,58$
$b=6,3$

f)
P (5,36); Q (16,6)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^5=36$ und $b \bullet a^{16}=6$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$36=b \bullet a^5$

<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$36=b \bullet a^5 \quad |:a^5$
$b=36/a^5$

<u>Einsetzen in die 2. Gleichung:</u>

$b \bullet a^{16}=6$
$36/a^5 \bullet a^{16}=6$
$36 \bullet a^{11}=6 \quad |:36$
$a^{11}=1/6 \quad |\sqrt[11]{}$
$a=\sqrt[11]{1/6}$
$a=0,85$

<u>Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:</u>

$b=36/a^5=36/0,85^5=81,13$

g)
P (2,3); Q (6,75)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^2=3$ und $b \bullet a^6=75$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$3=b \bullet a^2$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$3=b \bullet a^2 \quad |:a^2$
$b=3/a^2$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^6=75$
$3/a^2 \bullet a^6=75$
$3a^4=75 \quad |:3$
$a^4=25$
$a=2{,}23$

Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:

$b=3/2{,}23^2=0{,}6$

h)
P (3;30); Q (3;5)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^3=30$ und $b \bullet a^3=5$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$30=b \bullet a^3$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$30=b \bullet a^3 \quad |:a^3$
$b=30/a^3$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^3=5$
$30/a^3 \bullet a^3=5$
30=5, aber 30 ungleich 5 , deshalb liegen nicht beiden Punkte auf dem Graphen!

Ist ja auch klar, denn der x-Wert 3 kann bei einer Funktion nicht zwei y-Werte annehmen!

i)

P (4;12); Q (7;10)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^4=12$ und $b \bullet a^7=10$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$12=b \bullet a^4$

<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$12=b \bullet a^4 \quad |:a^4$
$b=12/a^4$

<u>Einsetzen in die 2. Gleichung:</u>

$b \bullet a^7=10$
$12/a^4 \bullet a^7=10$
$12/a^3=10 \quad |:12$
$a^3=5/6$
$a=0{,}941$

<u>Berechung von b durch Einsetzen in die 1. Gleichung:</u>

$b=12/0{,}941^4=15{,}3$

k)

P (0 ;c); Q (1 ;y)
$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=c$ und $b \bullet a^1=y$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$c=b \bullet a^0$

Auflösen der 1. Gleichung nach b:

$c=b \bullet a^0$
$b=c$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$b \bullet a^1=y$
$c \bullet a=y$

...

l)
P (0 ;b); Q (x ;1)

$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=b$ und $b \bullet a^x=1$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$b=b \bullet a^0$
$b=b$

<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$1=b \bullet a^x$

...

m)

P (0 ;10); Q (c ;d)

$y=b \bullet a^x$

$b \bullet a^0=10$ und $b \bullet a^c=d$

<u>Einsetzen in den Funktionsterm:</u>

$10=b \bullet a^0$
$b=10$

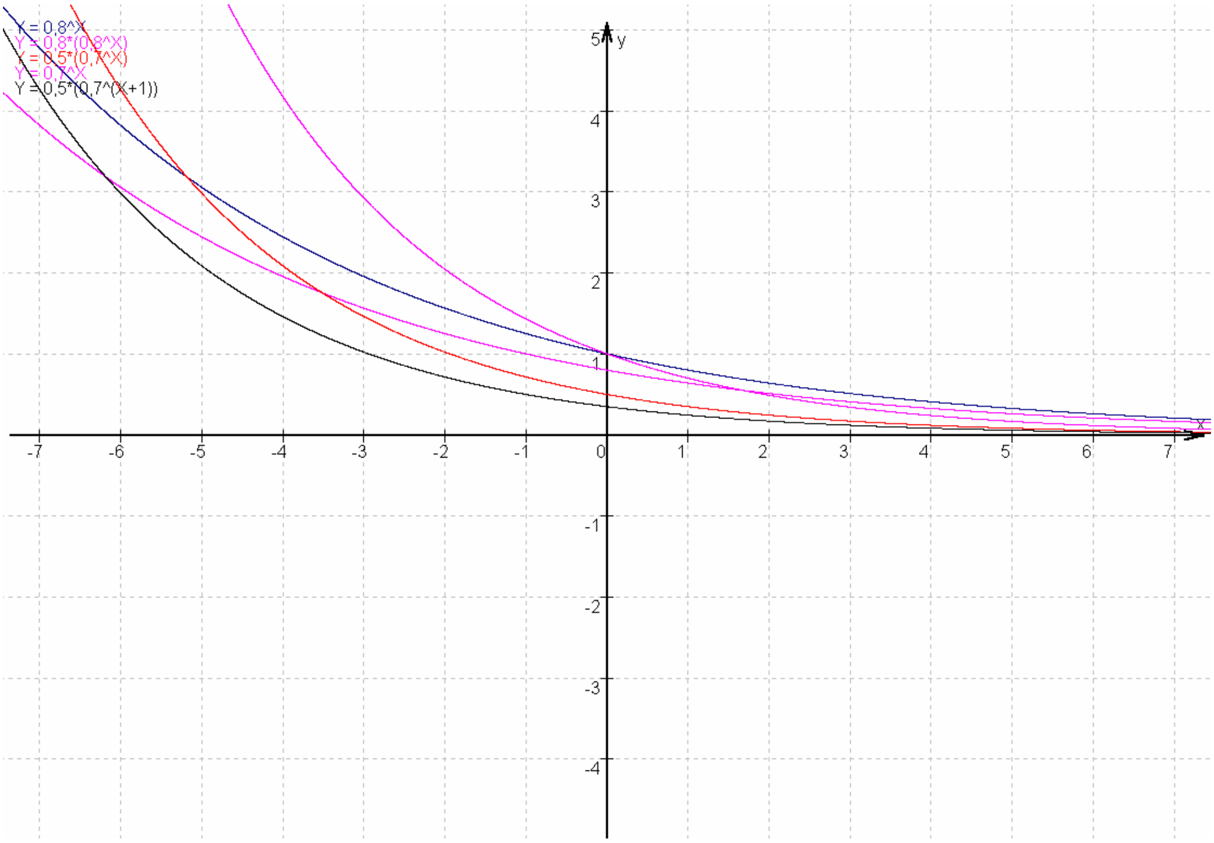
<u>Auflösen der 1. Gleichung nach b:</u>

$d=b \bullet a^c$

...

2)

a)



3)

a) $f(x)=3^{x-1}=3\bullet(\ 1/3\ )^{x}$
b) $f(x)=4^{2x}=8^{x}$
c) $f(x)=3^{2x+3}=9^{x}\bullet 27$
d) $f(x)=(\ ½\ )^{x-1}=2\bullet 0{,}5^{x}$
e) $f(x)=(\sqrt{4})^{2x+4}=16\bullet 4^{x}$
f) $f(x)=(\sqrt{4})^{4x}=16^{x}$
g) $f(x)=(\sqrt{4})^{3x+4}=16\bullet 8^{x}$
h) $f(x)=(\sqrt[3]{5})^{6x-3}=0{,}2\bullet 5^{x}$

Aufgaben zu Exponentialfunktionen der Form $f(x)=b*a^x$

1. In einem See verringert sich je 1 m Wassertiefe die Helligkeit um 40%. In 1 m Wassertiefe zeigt der Belichtungsmesser 3000 Lux.

a) Die Funktion Tiefe → Beleuchtungsstärke hat die Form $f(x)=b\bullet a^x$. Bestimme a und b. Zeichne den Graphen.

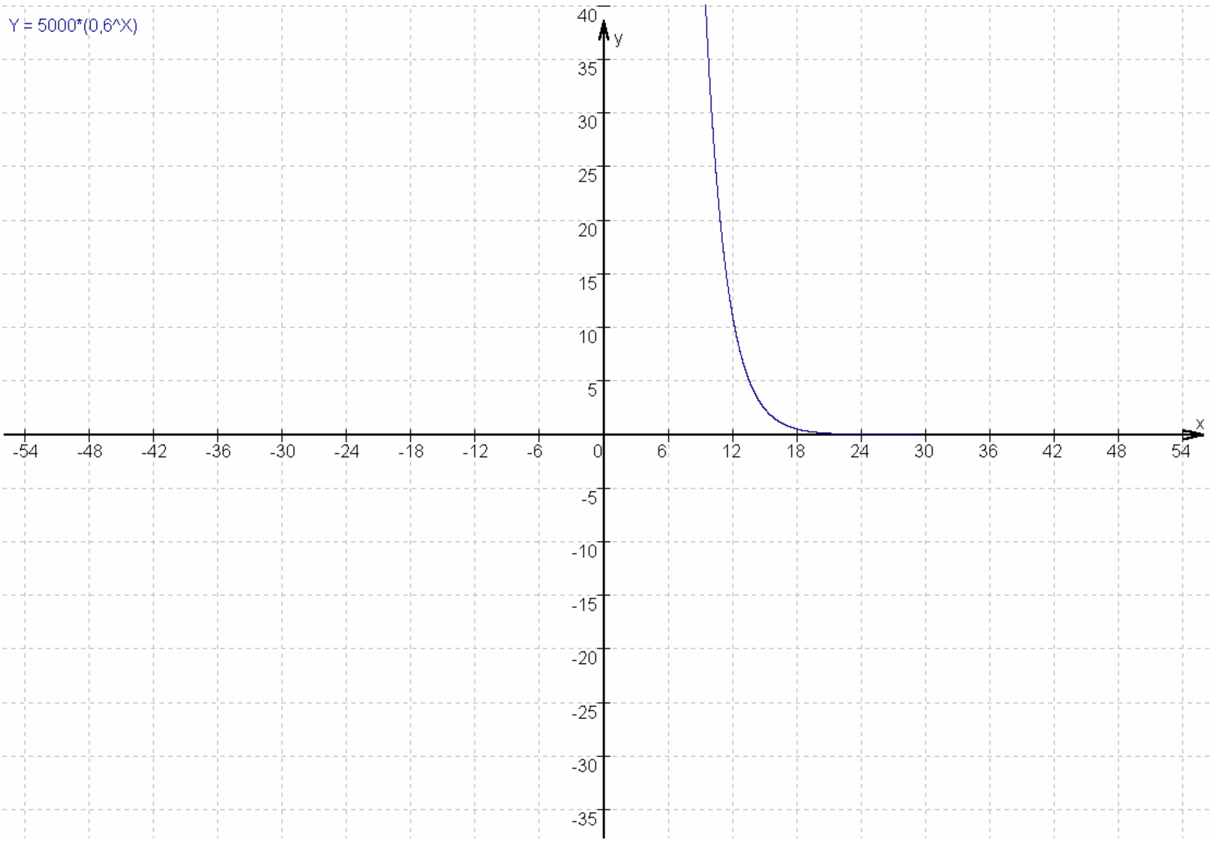
b) Bestimme am Graphen, nach wie viel m jeweils die Beleuchtungsstärke halbiert wird.

2. Milchsäurebakterien verdoppelt ihre Anzahl bei 38°C etwa alle halbe Stunde. Bestimme die Funktion Zeit (in h) → Anzahl der Bakterien für eine Bakterienkultur mit anfangs 1000 Bakterien.

<u>Lösungen:</u>

1)

a) $5000 \bullet (6/10)^x$



b)

$0{,}5=3000 \bullet (4/10)^x \quad | \bullet 3000$
$1/6000=(4/10)^x$

2)

a) $f(x)=1000 \bullet 4^x$