

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

1. Stelle eine Tabelle auf mit den Werten von α , $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0°	0	1
10°	0,174	0,985
20°	0,342	0,939
30°	0,5	0,866
40°	0,643	0,766
50°	0,766	0,643
60°	0,866	0,5
70°	0,939	0,342
80°	0,985	0,174
90°	1	0

Man stellt fest, dass bestimmte Werte gleich sind, daraus kann man Beziehungen entwickeln, die auf der nächsten Seite dargestellt sind... ☺

Beziehungen:

1.

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$

Beweis:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad | -\alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

2.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Beweis:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

3.

$$\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$$

Beweis mit dem Einheitskreis. (Dazu später mehr...)

Hier mal eine Tabelle, mit der ihr euch die wichtigsten Werte von sin und cos merken könnt.

$\sin 0^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\cos 90^\circ$
$\sin 30^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\cos 60^\circ$
$\sin 45^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos 45^\circ$
$\sin 60^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos 30^\circ$
$\sin 90^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$	$\cos 0^\circ$

Trigonometrie

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

1.

a) Berechne $\sin(\alpha)$ und $\cos(90^\circ - \alpha)$ für $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$. Was stellst du fest?

b) Verfahre ebenso mit $\cos(\alpha)$ und $\sin(90^\circ - \alpha)$. Welche Beziehung findest du hier?

2. Berechne $1/\tan(a)$ und $\tan(90^\circ - a)$ für $a = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$ und vergleiche jeweils beide Werte miteinander.

3. Bestimme $\cos(a)$ ohne Taschenrechner für einen Winkel a mit

a) $\sin(a) = 8/25$ b) $\sin(a) = 5/14$ c) $\sin(a) = 0,75$ d) $\sin(a) = 0,4$ e) $\sin(a) = 0,25 \sqrt{5}$

4. Bestimme $\sin(a)$ ohne Taschenrechner für einen Winkel mit

a) $\cos(a) = 0,8$ b) $\cos(a) = \frac{1}{4} \sqrt{7}$ c) $\cos(a) = 0,75 \sqrt{8}$ d) $\cos(a) = 0,5$ e) $\cos(a) = 6/5$

Lösungen:**1.**

a)

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \cos^2(a) &= 1 \quad | -\sin^2(a) \\ \cos^2(a) &= 1 - \sin^2(a) = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25 \\ \cos^2(a) &= 16/25 \quad | \sqrt{} \\ \cos(a) &= 4/25 \end{aligned}$$

b)

$$\tan(a) = \sin(a) / \cos(a) = 3/5 / 4/5 = 3/4$$

2.

a)

$$\tan^2(a) / (1 + \tan^2(a)) = \sin^2(a) / \cos^2(a) / (1 + \sin^2(a) / \cos^2(a)) = \sin^2(a) / \cos^2(a) + \sin^2(a) = \sin^2(a) / 1 = \sin^2(a)$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2(a) &= 1 - \cos^2(a) \quad | \sqrt{} \\ \sin(a) &= \sqrt{1 - \cos^2(a)} \end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \cos^2(a) &= 1 \quad | -\sin^2(a) \\ \cos^2(a) &= 1 - \sin^2(a) = 1 - (8/25)^2 = 1 - 64/125 = 9/25 \\ \cos^2(a) &= 9/25 \quad | \sqrt{} \\ \cos(a) &= 3/5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \cos^2(a) &= 1 \quad | -\sin^2(a) \\ \cos^2(a) &= 1 - \sin^2(a) = 1 - (5/14)^2 = 1 - 25/196 = 171/196 \\ \cos^2(a) &= 171/196 \quad | \sqrt{} \\ \cos(a) &= \sqrt{171/196} \end{aligned}$$

4.

a)

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1 \quad | -\cos^2(a)$$

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - (0,8)^2 = 1 - 0,64 = 0,36$$

$$\sin^2(a) = 0,36 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sin(a) = 0,6$$

b)

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1 \quad | -\cos^2(a)$$

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \left(\frac{1}{4} \sqrt{7}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} \cdot 7 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\sin^2(a) = \frac{9}{16} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sin(a) = \frac{3}{4}$$

Aufgaben zu Trigonometrie

5. Gegeben ist $\sin(a) = \frac{2}{7}\sqrt{6}$. Bestimme ohne Taschenrechner.

a) $\cos(a)$ b) $\tan(a)$ c) $\sin(90^\circ - a)$ d) $\tan(90^\circ - a)$

6. Vereinfache.

a) $\tan(a) \cdot \cos(a)$ b) $\sin(a)/\tan(a)$ c) $\sin^3(a) + \sin(a) \cdot \cos^2(a)$

d) $1/\tan(a) \cdot \cos(a)$ e) $\sqrt{1 + \cos(a)} \sqrt{1 - \cos(a)}$ f) $\sin(a) + \cos(a)/\tan(a)$

g) $\sin^4(a) - \cos^4(a)$ h) $\tan(a)/\sin(a) - \tan(a) \cdot \sin(a)$ i) $\cos(a)/1 - \sin(a) - 1/\cos(a)$

7.

a) Drücke $\tan(a)$ aus durch $\sin(a)$ (durch $\cos(a)$).

b) Berechne $\tan(a)$ mit der passenden Formel aus a), wenn $\sin(a) = 12/13$ ist

8.

a) Nimm das Bild zu Hilfe und rücke sowohl $\sin(a)$ als auch $\cos(a)$ durch $\tan(a)$ aus.

b) Berechne $\sin(a)$, wenn $\tan(a) = 2 \frac{1}{5}$ ist

c) Berechne $\cos(a)$, wenn $\tan(a) = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ ist.

Lösungen:**5.**

a)

$$5/7$$

b)

$$2/5\sqrt{6}$$

c)

$$5/7$$

d)

$$5/2\sqrt{6}$$

6.

a) $\sin \alpha$

b) $\cos \alpha$

c) $\sin \alpha$

d) $\frac{1}{\sin \alpha}$

e) $|\sin \alpha|$

f) $\frac{1}{\sin \alpha}$

g) $\sin^2 a - \cos^2 a$

h) $\cos \alpha$

i) $\tan \alpha$

7.

$$a) \tan(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}};$$

$$(\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)})$$

$$b) \frac{12}{5}; (\frac{2}{5}\sqrt{5})$$

8.

$$a) \sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 - \tan^2(\alpha)}}; \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2(\alpha)}}$$

$$b) \frac{11}{\sqrt{146}}$$

$$c) \frac{2}{13} \sqrt{39}$$