Zusammenfassung: Trigonometrie

1. Sinus, Kosinus, Tanges

$$\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Seitenverhältnisse ←→ Winkel

Sinus, Kosinus und Tangens hört sich im ersten Moment etwas komisch an, aber es sind halt nur bestimme Verhältnisse zwischen Seiten und Winkel.
Wenn man zwei Seiten hat, kann man mit Hilfe dieser Sätze ganz leicht einen Winkel ausrechnen... Und wenn man einen Winkel und eine Seite hat, kann man ganz leicht die fehlenden Seiten berechnen...

2. Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

1. Stelle eine Tabelle auf mit den Werten von α, sin(α) und cos(α)

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0°	0	1
10°	0,174	0,985
20°	0,342	0,939
30°	0,5	0,866
40°	0,643	0,766
50°	0,766	0,643
60°	0,866	0,5
70°	0,939	0,342
80°	0,985	0,174
90°	1	0

Beziehungen:

1.

$\sin(\alpha)=\cos(90°-\alpha)$
$\cos(\alpha)=\sin(90°-\alpha)$

Beweis:

$\sin(\alpha)=\frac{a}{c}=\cos(ß)$
$\alpha+ß=90° \quad |-\alpha$
$ß=90°-\alpha$

2.
$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

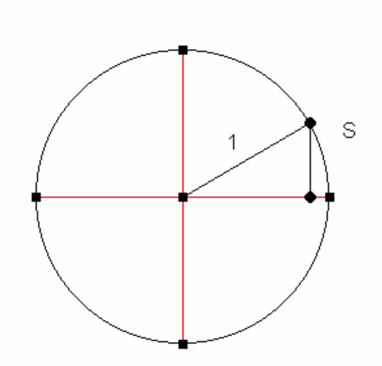
Beweis:
$a^2+b^2=c^2$
$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=(\frac{c}{c})^2$
$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

3.
$\tan(\alpha)=\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$
Beweis mit dem Einheitskreis.

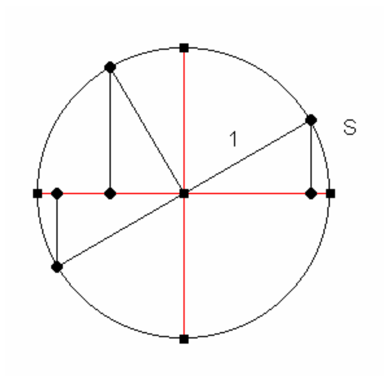
3. Der Weg zur Sinusfunktion und zur Kosinusfunktion

Der Weg zur Sinusfunktion

A) Einheitskreis 0°<a<90°

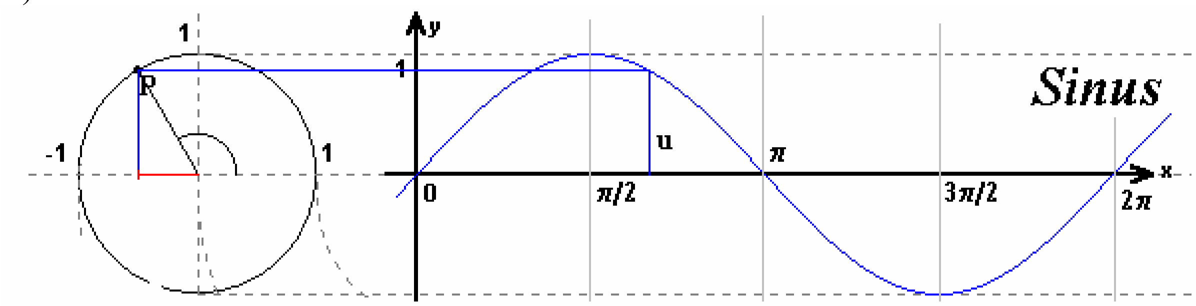


B) Einheitskreis 0°<a<360°

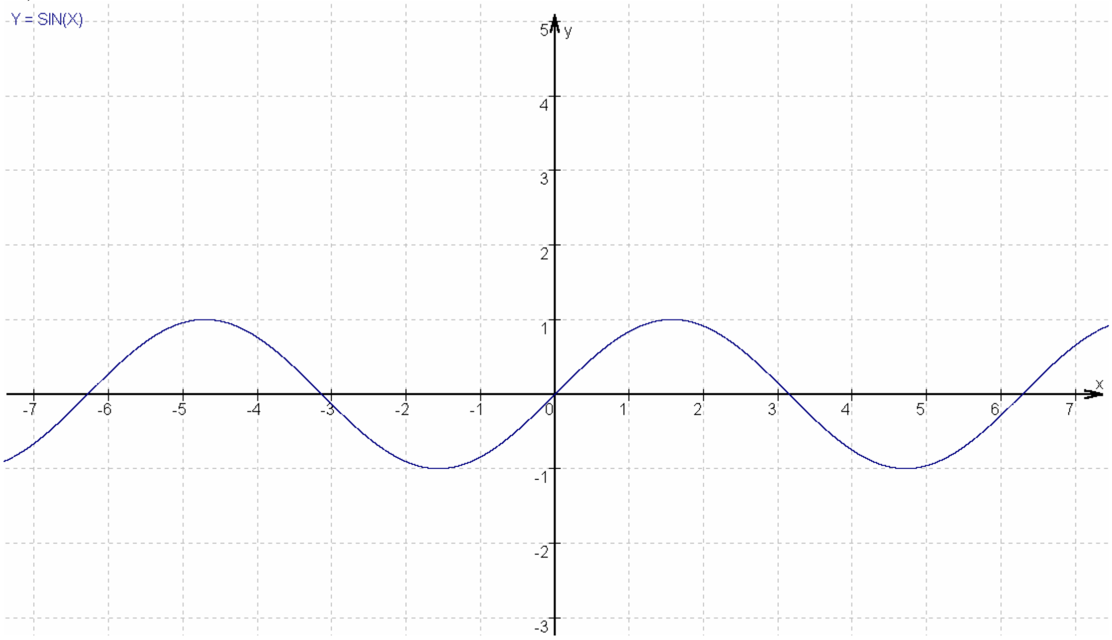


sin(a)=y

C)

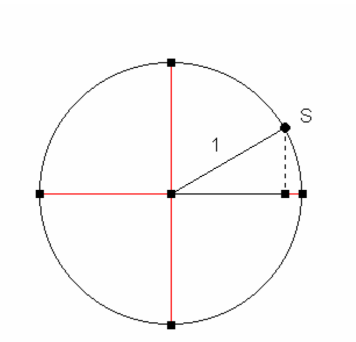


D) Sinusfunktion

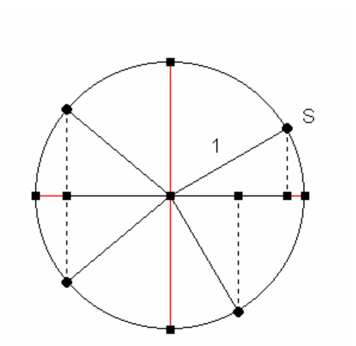


Der Weg zur Kosinusfunktion:

A) Einheitskreis 0°<a<90°

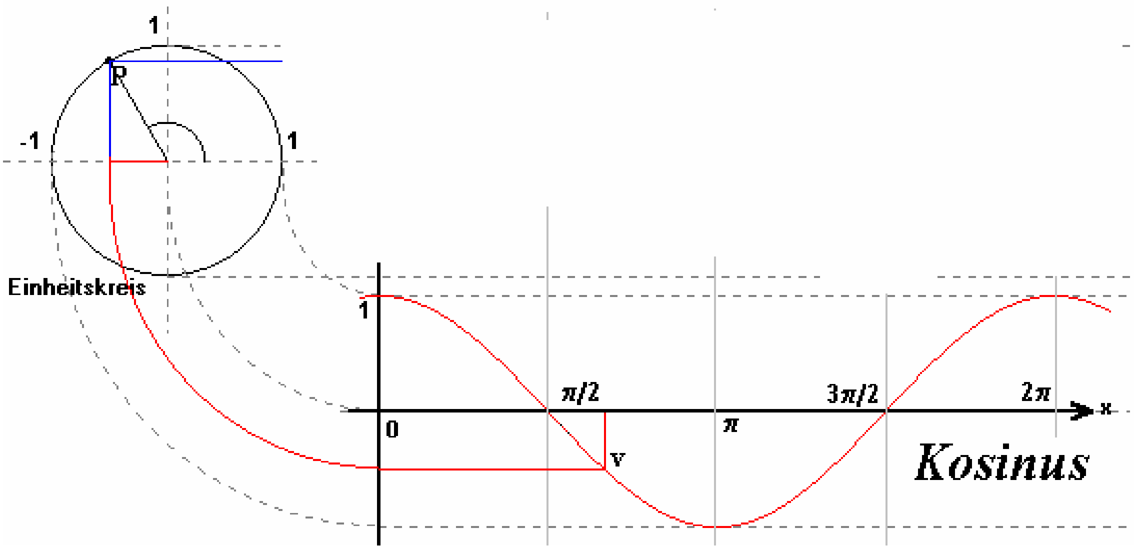


B) Einheitskreis 0°<a<360°

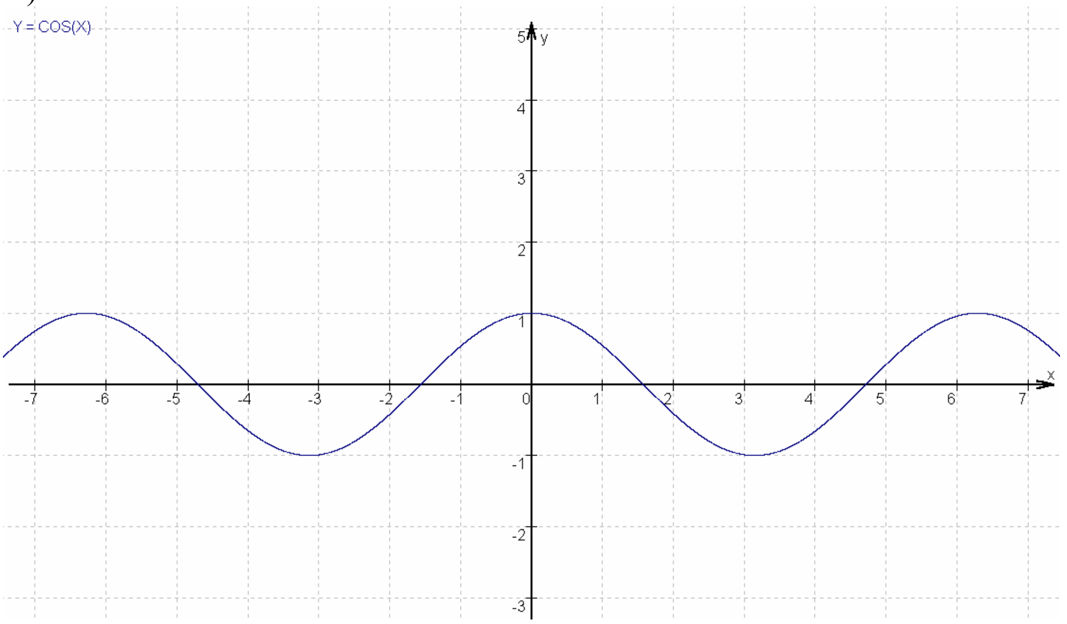


cos(a)=x

C)



D) Kosinusfunktion



Beziehungen:

1. Sinusfunktion

- $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$
- $\sin(360°-\alpha)=-\sin(\alpha)$
- $\sin(180°-\alpha)=\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha-180°)=-\sin(\alpha)$

2. Kosinusfunktion

- $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$
- $\cos(360°-\alpha)=\cos(\alpha)$
- $\cos(180°-\alpha)=-\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha-180°)=-\cos(\alpha)$

4. Bogenmaß / Winkelmaß

1. Das Bogenmaß mit dem Vielfachen von π:

Grad	Bogenmaß mit π
180°	π
90°	π/2
270°	1,5π
45°	π/4
135°	¾ π
225°	5/4π
315°	7/4π

Vorgehensweise:

1. Zuerst wendet man die Formel $b_\alpha = \frac{\alpha}{360} \bullet r \bullet \pi$ an.

$$b_\alpha = \frac{180}{360} \bullet r \bullet \pi = \frac{1}{2} \bullet r \bullet \pi$$

Dieses multipliziert man mit 2.

$b_a = \pi$

2. Somit hat man das Bogenmaß berechnet.

2. Bestimmung der Winkel:

Funktionswert	Grad
π	180°
$\pi/2$	90°
$\pi/4$	45°
$3\pi/4$	135°
$5\pi/4$	225°

Vorgehensweise:

1. Zuerst rechnet man:

Wenn man $\pi/2$ hat, rechnet man:
$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = 1/4$

2. Nun rechnet man:

$360 \bullet \frac{1}{4} = 90°$

<u>3. Bestimmung der Gradmaßes zum Bogenmaß:</u>

Grad	Rechnung
114,6°	2*180°/π
103,1°	1,8*180°/π
131,7°	2,3*180°/π
269,0°	4,7*180°/π

<u>Vorgehensweise:</u>

1. Man wendet die Formel

$\alpha = \frac{x}{\pi \bullet 180°}$ an

2. Somit erhält man für den das Bogenmaß 2:

$114{,}6° = \frac{2 \bullet 180°}{\pi}$

5. Allgemeiner Sinussatz und Kosinussatz

Natürlich gelten Sinussatz und Kosinussatz nicht nur für rechtwinklige Dreiecke, sondern auch für allgemeine Dreiecke. Man muss nur bestimmte Seiten und Winkel haben und man kann die fehlenden Seiten und Winkel ganz leicht ausrechnen!

Sinussatz:

Sinussatz: In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Länge zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b}=\sin(\alpha)/\sin(\beta)$$

$$\frac{b}{c}=\sin(\beta)/\sin(\gamma)$$

$$\frac{a}{c}=\sin(\alpha)/\sin(\gamma)$$

Kosinussatz:

Kosinussatz: In jedem Dreieck ABC ist folgendes:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\bullet\cos(\alpha)$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\bullet\cos(\beta)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\bullet\cos(\gamma)$$