

Summen von Potenzen: Vereinfachung durch Faktorisieren

Beispiel:

$$\frac{a^8 + a^5}{a^6 + a^3} = \frac{a^5(a^3 + 1)}{a^3(a^3 + 1)} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$$

Man addiert 2 Potenzen (mit gleicher Basis), indem man günstig faktorisiert bzw. ausklammert und dann die Regeln für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen anwendet.

$$\frac{a^8 + a^5}{a^6 + a^3} = \frac{a^5(a^3 + 1)}{a^3(a^3 + 1)} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$$

Aufgaben:

1. Vereinfache und berechne.

a) $3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3$ b) $3,7 \cdot 10^6 - 101,9 \cdot 10^6$ c) $9 \cdot 4^5 - 3 \cdot 4^5 + 7 \cdot 4^5$ d) $13 \cdot 4^7 - 9 \cdot 2^2 + 6 \cdot 4^3$

2. Vereinfache.

a) $3 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n$ b) $7^p - 11 \cdot 7^p$ c) $5^r - 0,8 \cdot 5^r$ d) $0,5 \cdot 11^d + 1,6 \cdot 11^d$

e) $x^n + 2 \cdot x^n$ f) $3 \cdot y^r + 7 \cdot y^r$ g) $0,5b^{-4} - 0,3b^{-4}$ h) $-5v^{-t} + 8v^{-t}$

3. Vereinfache.

a) $5x^3 - 8x^3 + 6x^3 - 7x^3$ b) $1,4z^{-4} - 0,8z^{-4} + z^{-4} - 1,2z^{-4}$

c) $1,5 a^n - a^n + 0,75a^n + 1,5a^n$ d) $0,5 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} - 1,7 \cdot 10^{-4}$

Lösungen:

1.

a) $3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5^3$

b) $3,7 \cdot 10^6 - 101,9 \cdot 10^6 = -1,8 \cdot 10^6$

c) $9 \cdot 4^5 - 3 \cdot 4^5 + 7 \cdot 4^5 = 13 \cdot 4^5$

d) $13 \cdot 4^7 - 9 \cdot 2^2 + 6 \cdot 4^3 = 1$

a) $3 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 5^n(3-2) = 5^n$

b) $7^p - 11 \cdot 7^p = 7^p(1-11) = -11 \cdot 7^p$

c) $5^r - 0,8 \cdot 5^r = 5^r(1-0,8) = 0,2 \cdot 5^r$

d) $0,5 \cdot 11^d + 1,6 \cdot 11^d = 11^d(0,5+1,6) = 2,1 \cdot 11^d$

e) $x^n + 2 \cdot x^n = x^n(1+2) = 3x^n$

f) $3 \cdot y^r + 7 \cdot y^r = y^r(3+7) = 10 \cdot y^r$

g) $0,5b^{-4} - 0,3b^{-4} = b^{-4}(0,5-0,3) = 0,2 \cdot b^{-4}$

h) $-5v^{-t} + 8v^{-t} = v^{-t}(-5+8) = 3 \cdot v^{-t}$

3.

a) $5x^3 - 8x^3 + 6x^3 - 7x^3 = x^3(5-8+6-7) = -4 \cdot x^3$

b) $1,4z^{-4} - 0,8z^{-4} + z^{-4} - 1,2z^{-4} = z^{-4}(1,4-0,8+1-1,2) = 0,4 \cdot z^{-4}$

c) $\frac{1}{2} a^n - a^n + \frac{3}{4} a^n + 1,5a^n = a^n(0,5+0,75+1,5) = 2,25 \cdot a^n$

d) $0,5 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} - 1,7 \cdot 10^{-4} = 10^{-4}(0,5-1-1,7) = -2,2 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben zu Summen von Potenzen

Aufgaben / Lösungen:

1.

$$a) \frac{a^{30} + a^{17}}{a^{19}} = \frac{a^{17}(a^{20} + 1)}{a^{15}} = a^2(a^{10} + 1)$$

$$b) \frac{a^5 c^4 + a^{17} c^7}{a^5 c^4} = \frac{a^5 c^4 (1 + a^{12} c^3)}{a^5 c^4} = 1 + a^{12} c^3$$

$$c) \frac{5a^9 + 6a^{10}}{18a^{13} + 15a^{12}} = \frac{5a^9(1 + 1,2a)}{15a^{12}(1 + 1,2a)} = \frac{5a^9}{15a^{12}} = \frac{1}{3a^3} = \frac{1}{3}a^{-3}$$

$$e) \frac{z^{n+4} - z^n}{z^n} = \frac{z^n(z^4 - 1)}{z^n} = (z^4 - 1)$$

$$f) \frac{-y^{k+1}}{y^{k-1} + y^k} = y^0 + y^0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$g) \frac{v^{m+3}}{v^{m-2} - v} = \frac{v^m \cdot v^3}{v^m \cdot v^2 - v} = \frac{v^m \cdot v^3}{v(1 - v^m \cdot v)} = \frac{v^m \cdot v^2}{1 - v^m \cdot v}$$

2.

$$d) (a^2 - b^2) \cdot (a-b)^{r-1} - (a-b)^{r-1} \cdot (b^2 - a^2) = (a-b)^{r-1} \cdot ((a^2 - b^2) - (b^2 - a^2))$$

3)

$$a) (v^5 + v^6)(v^7 - v^9) = v^{12} - v^{13} + v^{14} - v^{15} = v^{12}(1 - v + v^2 - v^3)$$

4)

$$a) 5(a+y)^r(a+y)^{2t} + 11(a+y)^{r+2t} - 9(a+y)^{2t+r} = 5(a+y)^{2t+r} + 11(a+y)^{r+2t} - 9(a+y)^{2t+r} = (a+b)^{2r+t} \cdot (3+7-8) = 2(a+b)^{2t+r}$$