Zusammenfassung: Potenzen / Wurzel

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

1. Potenz
1.1 Was ist eine Potenz?

a^n

a: Basis
^{n}:Exponent

→ $a \bullet a \bullet \ldots \bullet a = a^n$
n-mal

1.2 Potenzen mit positivem Exponenten

a^n → $a^2 = a \bullet a$

1.3 Potenzen mit negativem Exponenten

$2^{-2} = 1/(2)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$

a^{-2} → $1/a^2$

$\boxed{a^{-n} = 1/a^n}$

Das negative Vorzeichen des Exponenten bewirkt einen Bruch.

1.4 Zusammenfassung von 1.

1. $a^n = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a$
n-mal

2. $a^{-n} = 1/a^n$

3. a^n

a: Basis
^{n}:Exponent

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

2. Zehnerpotenzen

2.1 Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten

Potenzschreibweise	**Dezimalschreibweise**	**Beschreibung**
10^8	100000000	Eine Eins mit **8** Nullen
10^7	10000000	Eine Eins mit **7** Nullen
10^2	100	Eine Eins mit **2** Nullen
10^1	10	Eine Eins mit **1** Nullen
10^0	1	Eine Eins mit **0** Nullen

2.2 Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten

Potenzschreibweise	**Dezimalschreibweise**	**Beschreibung**
10^{-1}	0,1	Eine Eins an der **1. Nachkommastelle**
10^{-2}	0,01	Eine Eins an der **2. Nachkommastelle**
10^{-3}	0,001	Eine Eins an der **3. Nachkommastelle**
10^{-7}	0,0001	Eine Eins an der **7. Nachkommastelle**
10^{-8}	0,00001	Eine Eins an der **8. Nachkommastelle**
10^{-9}	0,000001	Eine Eins an der **9. Nachkommastelle**

$\mathbf{a^{-n}=1/a^n}$

Das negative Vorzeichen des Exponenten bewirkt einen Bruch.

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

2.3 Zusammenfassung von 2.

1.

10^{1}	10	Eine Eins mit **1** Nullen
10^{0}	1	Eine Eins mit **0** Nullen

$10^{0}=1$
$10^{1}=10$

2.

10^{-1}	0,1	Eine Eins an der **1. Nachkommastelle**
10^{-2}	0,01	Eine Eins an der **2. Nachkommastelle**
10^{-3}	0,001	Eine Eins an der **3. Nachkommastelle**

$10^{-1}=1/10^{1}=1/10$
$10^{-2}=1/10^{2}=1/10*10=1/100$
$10^{-3}=1/10^{3}=1/10*10*10=1/1000$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

3. Potenzen mit gleicher Basis

3.1 Multiplikation

$$\mathbf{a^p * a^q = \underbrace{(a \bullet a \bullet \ldots a)}_{\text{p Faktoren}} \bullet \underbrace{(a \bullet a \bullet \ldots a)}_{\text{q Faktoren}} = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a = a^{p+q}}$$

Beispiel zu 3.1:

$6^3 \bullet 6^{-4} = 6^{3+(-4)} = 6^{-1} = 1/6^1 = 1/6$

3.2 Division

$$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p Faktoren}} / \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{q Faktoren}} = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p-q Faktoren}} / 1 = \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{p-q Faktoren}}} \text{ (a=0, p, q>0 und p>q)}$$

$$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p Faktoren}} / \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{q Faktoren}} = 1 / \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p-q Faktoren}} = 1/a^{q-p} = a^{-(q-p)} = a^{p-q}}$$

(a=0, p, q>0 und p>q)

Beispiel zu 3.2:

$6^3 \bullet 6^{-4} = 6^{3-(-4)} = 6^7 = 6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 = 25200$

3.3 Zusammenfassung von 3.

1. Multiplikation

$\mathbf{a^p \bullet a^q = a^{p+q}}$

2. Division

$\mathbf{a^p : a^q = a^{p-q}}$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

4. Potenzen mit gleichem Exponenten

4.1 Multiplikation

$\mathbf{a^p \bullet b^p = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a \bullet b \bullet b \bullet \ldots b = (ab)(ab) \bullet \ldots \bullet (ab) = (ab)^p}$ **(p<0)**

p Faktoren p Faktoren p Faktoren

Beispiel zu 4.1:

$2^2 \bullet 3^2 = (2*3)^2 = 6^2 = 36$

4.2 Division:

p Faktoren

$\mathbf{a^p : b^p = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a/b \bullet b \bullet \ldots b = a/b \bullet a/b \bullet \ldots \bullet a/b = (a/b)^p}$ **(p>0 und b=0)**

p Faktoren p Faktoren p Faktoren

Beispiel zu 4.2:

$2^2 : 3^2 = (2:3)^2 = (2/3\ )^2 = 4/9$

4.3 Zusammenfassung zu 4.

1. Multiplikation

$\mathbf{a^p * b^p = (a \bullet b)^p}$

2. Division

$\mathbf{a^p : b^p = (a:b)^p = (a/b)^p}$ **(a=0; b=0)**

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

5. Beispiele

5.1 Beispiele zu 1.

1.

a) 7^3 b) 2^{-2}

5.2 Beispiele zu 2.

1.

a) 10^0 b) 10^{-7}

5.3 Beispiele zu 3.

1.

a) 7^2*7^{-4} b) $7^2:7^{-4}$

5.4 Beispiele zu 4.

1.

a) 6^3*5^3 b) $6^3:5^3$

Lösungen:

1.

a) $7^3 =343$
b) $2^{-2} = ¼ =0,25$

1.

a) $10^0 =1$
b) $10^{-7} =1/10000000$

1.

a) $7^2 \bullet 7^{-4} =1/49$
b) $7^2:7^{-4} =11702$

1.

a) $6^3 \bullet 5^3 =30^3=27000$
b) $6^3:5^3 =(6/5)^3= 1\ 91/125$

6. Wurzeln

6.1 Potenzen und Radizieren

Potenzieren $\longrightarrow$

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Radizieren $\longleftarrow$

Potenzieren $\longrightarrow$

x	x^3
0	0
1	1
2	8
3	18
4	64
5	125

Radizieren $\longleftarrow$

Der Radikand einer n-ten Wurzel muss stets größer oder gleich 0 sein.

6.2 Potenzieren und Radizieren

<u>Potenzieren:</u>

Man rechnet mit einer Potenz.
x^0, x^1, x^2, x^3

<u>Radizieren/Wurzelziehen:</u>

Man macht aus einer Wurzel eine Potenz oder Zahl.

$\sqrt{4}=2$
$\sqrt[3]{8}=2$, denn $2 \bullet 2 \bullet 2=8$
$\sqrt[3]{8}=2$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

6.3 Zusammenfassung von 6.

1. Potenzieren

$x=2 \rightarrow x^2=4$

2. Radizieren / Wurzelziehen

$\sqrt{4}=2$

3. Wurzel

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

7. Beispiele zu 6.

7.1 Wurzeln

1.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{9}$

7.2 Potenzieren/Radizieren

1.

a) x^3 ; x=6 b) x^2 ; x=1

7.3 Wurzeln

1.

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{27}$

Lösungen:

1.

a) 2
b) 3

2.

a) $6^3=216$
b) $1^2=1$

3.

a) $\sqrt[3]{8}=2$, denn $2 \bullet 2 \bullet 2=8$
b) $\sqrt[3]{27}=3$, denn $3 \bullet 3 \bullet 3=27$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

8. Potenzen mit rationalen Exponenten

8.1 Rationale Exponenten

$\sqrt{2^8}=2^4$ $\sqrt{2^4}=2^2$ $\sqrt{2^2}=2^1$ $\sqrt{2}=2^{½}$

$\sqrt[3]{5^{27}}=5^9$ $\sqrt[3]{5^9}=5^3$ $\sqrt[3]{5^3}=5^1$ $\sqrt[3]{5}=5^{1/3}$

Überträgt man das Gesetz für „Potenzen von Potenzen" auf rationale Exponenten, so erhält man:

$(a^{1/n})=a^{1/n*n}=a^{n/n}=a$ (a>0 und n aus N)

anderseits ist auch:

$(\sqrt[n]{a})^n=a$ (a>0 und n aus N)

8.2 Definition

Definition: Für a>0, p aus Z und q aus N ist: $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

Insbesondere ist für n aus N, n>1 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

8.3 Potenzgesetze für rationale Exponenten:

Sind r und s rationale Zahlen und a und b positive reelle Zahlen, so ist:
Für Potenzen mit gleicher Basis: $a^r \bullet a^s=a^{r+s}$ und $a^r:a^s=a^{r-s}$
Für Potenzen mit gleichem Exponenten: $a^r \bullet b^r=(a*b)^r$ und $a^r:b^r=(a:b)^r$
Für Potenzen von Potenzen: $(a^r)^s=a^{r \bullet s}$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

8.4 Zusammenfassung von 8.

1. Überträgt man das Gesetz für „Potenzen von Potenzen“ auf rationale Exponenten, so erhält man:

$(a^{1/n})=a^{1/n*n}=a^{n/n}=a$ (a>0 und n aus N)

anderseits ist auch:

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$ **(a>0 und n aus N)**

2.

Definition: Für a>0, p aus Z und q aus N ist: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Insbesondere ist für n aus N, n>1 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

3. Potenzgesetze für rationale Exponenten:

Sind r und s rationale Zahlen und a und b positive reelle Zahlen, so ist:

Für Potenzen mit gleicher Basis: $a^r \bullet a^s=a^{r+s}$ **und** $a^r:a^s=a^{r-s}$

Für Potenzen mit gleichem Exponenten: $a^r \bullet b^r=(a \bullet b)^r$ **und** $a^r:b^r=(a:b)^r$

Für Potenzen von Potenzen: $(a^r)^s=a^{r \bullet s}$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

9. Beispiele zu 8.

9.1 Beispiele zu 8.

1. Berechne.

a) $\sqrt{2}^{8}$ b) $\sqrt{2}^{2}$ c) ${}^{3}\sqrt{5}*2$ d) ${}^{9}\sqrt{x}*x$

10.2 Beispiele zu 9.

1. Berechne.

a) $(a^{\sqrt{5}})^{3\sqrt{5}}$ b) $b^{3\sqrt{2}+1}/b^{2\sqrt{2}-2}$

Lösungen:

1.

a) $\sqrt{2}^{8} = \sqrt{\ }2^{4}$
b) $\sqrt{2}^{2} = \sqrt{2}^{1}$
c) ${}^{3}\sqrt{5} \bullet 2 = {}^{3}\sqrt{5} \bullet {}^{3}\sqrt{2}^{3} = {}^{3}\sqrt{5} \bullet 2^{3} = {}^{3}\sqrt{5} \bullet 8 = {}^{3}\sqrt{40}$
d) ${}^{9}\sqrt{x} \bullet x = {}^{9}\sqrt{x} \bullet {}^{a}\sqrt{x}^{a} = {}^{a}\sqrt{x} \bullet x^{a} = {}^{a}\sqrt{x}^{a+1}$

2.

a) $(a^{\sqrt{5}})^{3\sqrt{5}} = a^{\sqrt{5}} \bullet 3^{\sqrt{5}} = a^{3*5} = a^{15}$

b) $b^{3\sqrt{2}+1}/b^{2\sqrt{2}-2} = b^{3\sqrt{2}+1-(2\sqrt{2}-2)} b^{3\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}+2} = b^{\sqrt{2}+3}$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

10. Zusammenfassung

10. Zusammenfassung
10.1 Zehnerpotenzen / Potenzen
10.2 Potenzgesetze im Bereich Z
10.3 Potenzgesetze im Bereich R.
10.4 Wurzeln
10.5 Potenzieren von Potenzen

10.1 Zehnerpotenzen / Potenzen
10.1.1
$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet \; \dots \; \bullet a}_{n\text{-mal}}$

10.1.2
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

10.1.3

a^n

a: Basis
^{n}:Exponent

10.1.4 Zehnerpotenzen mit positivem Exponent

$10^{\mathbf{1}}$	10	Eine Eins mit **1** Nullen
$10^{\mathbf{0}}$	1	Eine Eins mit **0** Nullen

$10^0=1$
$10^1=10$
11.1.5 Zehnerpotenzen mit negativem Exponent

$10^{\mathbf{-1}}$	0,1	Eine Eins an der **1. Nachkommastelle**
$10^{\mathbf{-2}}$	0,01	Eine Eins an der **2. Nachkommastelle**
$10^{\mathbf{-3}}$	0,001	Eine Eins an der **3. Nachkommastelle**

$10^{-1}=1/10^1=1/10$
$10^{-2}=1/10^2=1/10*10=1/100$
$10^{-3}=1/10^3=1/10*10*10=1/1000$
© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

10.2 Potenzgesetze im Bereich Z.

10.2.1 Potenzen mit gleicher Basis
10.2.1.1 Multiplikation

$$\mathbf{a^p \bullet a^q = (\underbrace{a \bullet a \bullet \ldots a}_{\text{p Faktoren}}) \bullet (\underbrace{a \bullet a \bullet \ldots a}_{\text{q Faktoren}}) = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a = a^{p+q}}$$

10.2.1.2 Division

$$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p Faktoren}} / \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{q Faktoren}} = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p-q Faktoren}} / 1 = \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{p-q Faktoren}}} \ (a=0,\ p,\ q>0 \text{ und } p>q)$$

$$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p Faktoren}} / \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{q Faktoren}} = 1 / \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{\text{p-q Faktoren}} = 1/a^{q-p} = a^{-(q-p)} = a^{p-q}}$$

(a=0, p, q>0 und p>q)

10.2.2 Potenzen mit gleichem Exponenten
10.2.2.1 Multiplikation

$$\mathbf{a^p \bullet b^p = \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{p Faktoren}} \bullet \underbrace{b \bullet b \bullet \ldots b}_{\text{p Faktoren}} = \underbrace{(ab)(ab) \bullet \ldots \bullet (ab)}_{\text{p Faktoren}} = (ab)^p \ (p<0)}$$

10.2.2.2 Division

$$\mathbf{a^p : b^p = \overbrace{\underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{p Faktoren}}}^{\text{p Faktoren}} / \underbrace{b \bullet b \bullet \ldots b}_{\text{p Faktoren}} = \underbrace{a/b \bullet a/b \bullet \ldots \bullet a/b}_{\text{p Faktoren}} = (a/b)^p \quad (p>0 \text{ und } b=0)}$$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

10.3 Potenzgesetze im Bereich R.

10.3.1 Potenzen mit gleicher Basis
10.3.1.1 Multiplikation

$\mathbf{a^p \bullet a^q = (a \bullet a \bullet \ldots a) \bullet (a \bullet a \bullet \ldots a) = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a = a^{p+q}}$
p Faktoren q Faktoren

10.3.1.2 Division

p Faktoren p-q Faktoren
$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = a*a* \ldots *a/ a*a* \ldots *a = a*a* \ldots *a/1 = a*a* \ldots *a}$ (a=0, p, q>0 und p>q)
q Faktoren p-q Faktoren

p Faktoren p-q Faktoren
$\mathbf{a^p : a^q = a^p / a^q = a*a* \ldots *a/ a*a* \ldots *a = 1/ a*a* \ldots *a = 1/a^{q-p} = a^{-(q-p)} = a^{p-q}}$
q Faktoren

(a=0, p, q>0 und p>q)

10.3.2 Potenzen mit gleichem Exponenten
10.3.2.1 Multiplikation

$\mathbf{a^p * b^p = a*a* \ldots *a*b*b* \ldots b = (ab)(ab)* \ldots *(ab) = (ab)^p}$ **(p<0)**
p Faktoren p Faktoren p Faktoren

10.3.2.2 Division

p Faktoren
$\mathbf{a^p : b^p = a*a* \ldots *a/b*b* \ldots b = a/b*a/b* \ldots *a/b = (a/b)^p}$ **(p>0 und b=0)**
p Faktoren p Faktoren p Faktoren

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

10.4 Wurzeln

10.4.1 Wurzen

Radizieren

$\sqrt[3]{8}=2$, denn 2*2*2=8

$\sqrt[3]{8}=2$

$\mathbf{a^{1/n}=\sqrt[n]{a}}$

10.4.2 Wurzeln

Potenzieren →

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Radizieren ←

Potenzieren →

x	x^3
0	0
1	1
2	8
3	18
4	64
5	125

Radizieren ←

Der Radikand einer n-ten Wurzel muss stets größer oder gleich 0 sein.

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]

Potenzieren:

Man rechnet mit einer Potenz.
x^0, x^1, x^2, x^3

Radizieren/Wurzelziehen:

Man macht aus einer Wurzel eine Potenz oder Zahl.

$\sqrt{4}=2$

10.5 Potenzieren von Potenzen
10.5.1 Potenzieren von Potenzen

$\mathbf{(a^p)^q=a^{pq}}$

1. $\mathbf{(3^2)^3=9^3=9*9*9=729}$

2. $\mathbf{(3^2)^3=3^{2*3}=3^6=3*3*3*3*3*3=729}$

© klassenarbeiten.de [Autor: Florian Modler]