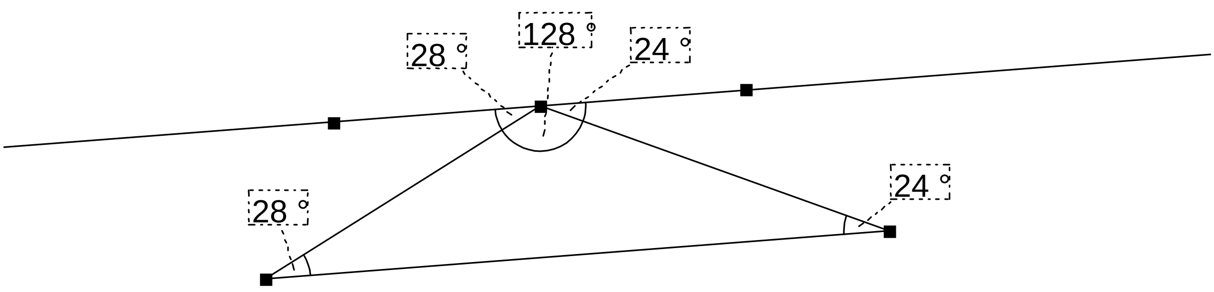
Winkelsumme in n-Ecken

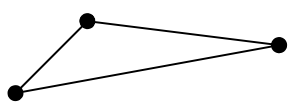
Winkelsumme in Dreiecken

Unsere Behauptung lautet:
Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180°.
Jetzt müssen wir unsere Begründung nur noch beweisen. Wir zeichnen einfach mal ein Dreieck:

Wir schreiben unsere Vermutung neben dem Dreieck:
$\alpha+\beta+\gamma=180°$.
Als erstes zeichnen wir eine Parallele zu der Basis:



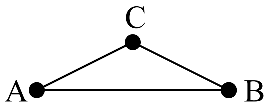
Wir können nun die Wechselwinkel von α und β bestimmen. Sie sind nämlich genau so groß wie α 1 und β1. Wir sehen, wenn wir alle Winkel eingetragen haben, ergibt $\alpha 1+\beta 1+\gamma=180°$, also muss $\alpha+\beta+\gamma=180°$ auch sein, weil α und α1 sind Wechselwinkel an Parallelen und β und β1 sind auch Wechselwinkel, also gleich groß. Es gilt:
$\alpha=\alpha 1$ und
$\beta=\beta 1$
Wir fassen unser Ergebnis noch einmal zusammen:
Zuerst zeichnen wir ein Dreieck. Nun zeichnen wir eine Parallele zu der Basis des Dreiecks. Jetzt messen wir alle Winkel. Wir sehen die an der Parallelen liegenden Winkel ergeben zusammen 180°. Deswegen muss auch die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck 180° sein, weil $\alpha=\alpha 1$ und $\beta=\beta 1$.



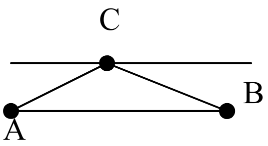
Winkelsumme in Dreiecken - Zusammenfassung

Unsere Behauptung ist, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck 180° betragen. Dieses ist aber nur eine Vermutung. Wie können wir dieses Aussage beweisen?. Ganz einfach:

1. Wir zeichnen ein Dreieck



2. Wir zeichnen eine Parallele zu der Basis.
   Nun bestimmen wir alle Winkel



Uns fällt auf, dass α und $\alpha 1$ Wechselwinkel sind und β und $\beta 1$ sind auch Wechselwinkel.

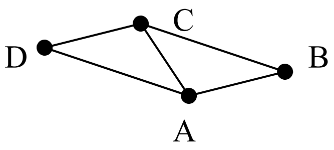
3. Nun fällt uns auf, dass $\alpha 1+\beta 1+\gamma=180°$
4. Wenn wir jetzt weiter denken, sehen wir, dass $\alpha+\beta+\gamma=180°$ sind, da $\alpha=\alpha 1$ und $\beta=\beta 1$ sind.

Ergebnis:
Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ergeben 180°, da $\alpha 1+\beta 1+\gamma=180°$ sind muss auch $\alpha+\beta+\gamma=180°$ sein, da $\alpha=\alpha 1$ und $\beta=\beta 1$ sind.

Winkelsumme in n-Ecken

Wie ist es aber in einem 4-Eck?

1. Wir zeichnen ein 4-Eck mit der Diagonale $\overline{AC}$



2. Nun schauen wir uns das 4-Eck genauer an:
   Wir sehen, wenn wir die Diagonale $\overline{AC}$ zeichnen erhalten wir 2-Dreiecke und wir wissen, dass in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel 180° beträgt. Wir haben also 2-Dreiecke, also müssen wir $2 \bullet 180°$ rechnen dieses ergibt dann:
   $2 \bullet 180°=360°$. Also ist die Summe der Innenwinkel in einem 4-Eck 360°.
   Ergebnis:
   Wir müssen uns das n-Eck genauer anschauen und zerlegen es dann in n-Dreiecke oder in n-Vierecke. Wenn wir die Anzahl wissen, müssen wir nur noch $n \bullet 180°$ oder $n \bullet 360°$ rechnen. Dafür gibt es natürlich auch eine Formel sie lautet:
   $(n-2) \bullet 180°$. Sie bedeutet:
   Wenn man die Ecken des n-Ecks um 2 vermindert und dieses Ergebnis mit 180° multipliziert, erhält man die Summe der Innenwinkel.